ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ СУШКИ

**Авторы: Наталья НЕТРЕБА, Галина ДИКУСАР,
Андрей ЛУПАШКО, Алёна ГЕНДОВ-МОШАНУ**

Технический Университет Молдовы

Резюме: *в данной работе рассматриваются теоретические основы математического моделирования процесса сушки гетерогенных систем, а так же сущность и идея метода регрессионного анализа. Задачей регрессионного анализа является подбор математических формул, наилучшим образом описывающих экспериментальные данные.*

Ключевые слова: *виноград, сушка гетерогенных систем, регрессионный анализ, математическое моделирование, MathCad.*

Экспериментальные исследования, необходимые для изучения любого процесса, включающие и эволюцию данного процесса во времени, не могут осуществляться бесконечно длительно. По этой причине, главной задачей при теоретическом изучении любого процесса во всех областях является создание математической модели на основе экспериментальных данных, и эта задача напрямую связана с отождествлением процессов (систем).

Существует множество методов отождествления процессов (систем). Основными из них являются:

- дискретное отождествление или отождествление непрерывных значений. В первом случае значения обладают дискретной эволюцией во времени, а во втором случае - непрерывной эволюцией. При этом результатами отождествления являются дискретные и, соответственно, непрерывные модели;
- отождествление при использовании линейной или нелинейной модели. В первом случае математическим описанием является линейная система уравнений разностей или дифференциальных уравнений. Во втором случае система математического описания нелинейна;
- параметрическое или непараметрическое отождествление. В первом случае результатом отождествления является параметрическая модель, описанная через дифференциальные уравнения, уравнения разностей, передаточные функции и т. д. Результатом непараметрического отождествления является модель, представленная кривыми, таблицами значений и т. д.;
- детерминированное или статистическое отождествление. В первом случае отражение процесса производится в determinist области, т.е. ни одна величина не является случайной. Во втором случае отражение процесса производится в стохастической области, а величины случайны и носят характер вероятности;
- отождествление во временной области, области частоты или частотно-временной области (последние два уже рассматривались выше). В первом случае математическое описание производится через дифференциальные уравнения, уравнения разностей и т.д. Во втором случае получают характеристики частоты, а в третьем случае результатом являются частотно-временные характеристики;
- теоретическое, экспериментальное или комбинированное отождествление. В настоящий момент довольно часто процессы отождествляются комбинированным способом, т.е., когда уже после теоретического отождествления появляется информация, предшествующая отождествлению экспериментальному. Как следствие, отождествление процессов должно обеспечивать наиболее точное совпадение величины, полученной путем моделирования (подсчитанная величина), с ее значениями, полученными экспериментально (измеренная величина).

Процесс сушки гетерогенных систем, к которым также относится виноград, является сложным, недостаточно изученным из-за трудностей, возникающих при исследовании различных параметров, влияющих на процесс сушки. Экспериментальные исследования, направленные на изучение какого-либо процесса, включая его изменение с течением времени, не могут быть больше какого-то числа. Таким образом, разрабатывается математическая модель, с применением принципов и законов, известных алгоритмов, которая описывает изменение во времени или после определенных взаимных зависимостей в условиях существования внешних факторов, изученных специалистами. По этим причинам, часто, теоретически возможно установление прогнозируемой математической модели [1, 2, 3], а затем завершение ее на основе экспериментальных данных.

Как правило, экспериментальные данные представлены в виде графиков, которые состоят из пар данных (U_i, τ_i) для зависимых от одной независимой переменной, или состоящих из набора данных (U_i, τ_i, t_i, ...), где существуют зависимости от нескольких независимых переменных.

Здесь U - влагосодержание, %, τ - время сушки, мин, t - температура, °С, τ' – величина импульсного режима, i =1, 2, ..., n - 1, n - количество измерений.

Задача состоит в аппроксимировании дискретных зависимостей U_i (τ_i) или U_i (τ_i, t_i) с непрерывными зависимостями U (τ) или U (τ, t, τ').

Различают три типа приближения:

1. Интерполяция и экстраполяция (прогнозирование) данных;
2. Регрессионный анализ;
3. Фильтрация данных с последующей интерполяцией или регрессией.

При интерполяции функция U (τ) проходит через точки (U_i, τ_i) и аппроксимирует зависимость U_i (τ_i), но только в пределах диапазона, который содержит значения τ_i. При экстраполяции функция U (τ) аппроксимирует эту зависимость за пределами этого диапазона.

При регрессии функция U (τ) не проходит через точки (U_i, τ_i). Техникой регрессии называется сглаживание экспериментальных данных.

При фильтрации данных, некоторые из них (которые считаются ошибочными или лишними) либо исключают из исходного множества, либо снижают их влияние в соответствии с определенным алгоритмом фильтрации.

Интерполяцию данных производят методом Лагранжа или Ньютона, в случае выбора в качестве непрерывной функции полиномома порядка N, или с помощью сплайн-функций в случае выбора полиномов низкой степени для различных сегментов изменения независимой переменной.

В первом случае получают заданную функцию, а во втором случае – это не возможно. Интерполяция невозможна тогда, когда экспериментальные данные получены с большой точностью (4-5 знаков после запятой), а количество измерений в рамках эксперимента слишком мало.

Это ограничение связано с высокой степенью полученного полинома и с существенным ростом ошибок при вычислении.

Идея метода состоит в определении коэффициентов выбранного класса функций (например, для полинома) [3, 4]:

$$U(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau + \cdots + a_{N-1}\tau^{N-1}. \qquad (1)$$

В условии сопоставления значений функции U со значениями функции U_i в узлах τ_i интерполяции. В проведенных экспериментах точность измерений не высока (1-2 знаков после запятой), а число измерений в эксперименте велико (N = 10 до 40).

Методы фильтрации применяются в основном для анализа признаков, исключающих воздействие шума, т.е. для интенсивно осциллирующих функций.

Таким образом, для наших экспериментов предпочтительным является регрессионный анализ экспериментальных данных.

Целями регрессионного анализа являются:

- определение наличия связи между переменными и характера этой связи (т. е. нахождение описывающего её математического уравнения);
- определение степени детерминированности вариации критеральной переменной предикторами;
- предсказание значения зависимой переменной с помощью независимой(-ых);
- определение вклада отдельных независимых переменных в вариацию зависимой.

Задачей регрессионного анализа является подбор математических формул, наилучшим образом описывающих экспериментальные данные. Иными словами, аппроксимация данных с учетом их статистических параметров относится к задачам регрессии. Они обычно возникают при обработке экспериментальных данных, полученных в результате измерений процессов или физических явлений, статистических по своей природе, или на высоком уровне помех.

Если измерения показывают случайный характер экспериментальных данных прежде чем произведена аппроксимация, возникает необходимость в статистической обработке данных в соответствии с методологией, изложенной в [4], а в случае, если данные измерены можно напрямую применять методологию приведенную в [3].

Регрессия состоит в определении такой функции U (τ), которая в некотором смысле, сводит к минимуму отклонения | Ui (τi) - Ui (τi) |. Успех такой аппроксимации во многом зависит от правильного выбора класса функций.

Наиболее распространенные классы используемых функций:

1. Полиноминальные $U(\tau, A, B, C, \dots) = A + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3 + \dots$
2. Экспоненциальные $U(\tau, A, B, C, \dots) = A + e^{B\tau} + C$
3. Логические $U(\tau, A, B, C, \dots) = \frac{A}{1+Be^{-C\tau}}$
4. Сунусоидальные $U(\tau, A, B, C, \dots) = A \cdot \sin(\tau + B) + C$
5. Степенные $U(\tau, A, B, C, \dots) = A\tau^B + C$
6. Логарифмические $U(\tau, A, B, C, \dots) = A \cdot \ln(\tau + B) + C$

Анализ полученных экспериментальных данных и литературы по технологии сушки винограда бессемянных сортов [5], показал, что зависимость влажности от времени сушки является функцией монотонной, достаточно гладкой со строго положительными значениями. Данный факт позволяет нам предположить, что может быть выбран класс полиномиальных функций, а степень полинома будет мала (3 или 4). Цель регрессии заключается в расчете параметров A, B, C, ... ε_i определенных при условии, что средняя сумма квадратичных отклонений является минимальной. Таким образом, сводится к минимуму зависимость:

$$f(\tau, A, B, C) = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(U_i - U_{(\tau_i)}\right)^2}{N} \to \min. \tag{2}$$

Таким образом, задача сводится к определению минимума функции многих переменных.

В соответствии с этим выбором, полином порядка m(m<N):

$$U_m(\tau) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots + a_m\tau^m. \tag{3}$$

Функциональная зависимость f будет:

$$f = \sum_{i=1}^{n}(U_i - U_m(\tau_i))^2. \tag{4}$$

Функциональная зависимость f имеет минимальное значение, если:

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 0, i = 0, m. \tag{5}$$

Получим m+1 выражений:

$$\sum_{i=0}^{n}(U_i + a_0 - a_1\tau_1 - a_2\tau_i^2 - \dots - a_m\tau_i^m) \cdot \tau_i^k. \tag{6}$$

Или

$$a_0\sum_{i=0}^{n}\tau_i^k + a_1\sum_{i=0}^{n}\tau_i^{k+1} + a_2\sum_{i=0}^{n}\tau_i^{k+2} + \dots + a_m\sum_{i=0}^{n}\tau_i^{k+m} = \sum_{i=0}^{n}U_i\tau_i^k. \tag{7}$$

Тогда:

$$b_k = \sum_{i=0}^{n} \tau_i^k \qquad\qquad c_k = \sum_{i=0}^{n} U_i \tau_i^k. \tag{8}$$

Составим систему:

$$\begin{cases} b_0 a_0 + b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_m a_m = c_0 \\ b_1 a_0 + b_2 a_1 + b_3 a_2 + \cdots + b_{m+1} a_m = c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_m a_0 + b_{m+1} a_1 + b_{m+2} a_2 + \cdots + b_{2m} a_m = c_m \end{cases} . \tag{9}$$

Мы получили систему m+1 неоднородных алгебраических уравнений в связи с коэффициентами a_0 .... a_m, которую можно представить как детерминант данной системы:

$$D = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m & b_{m+1} & b_{m+2} & \dots & b_{2m} \end{vmatrix} . \tag{10}$$

Он называется определителем Грамма и не является нулевым [3]. Таким образом, система уравнений имеет одно решение, в результате чего получена функция U(τ), которая дает минимальную функциональность.

Для определения, насколько далека кривая U(τ) от экспериментальных данных, могут быть использованы несколько правил:

1. Максимальное абсолютное отклонение $E_\infty(U) = max\{U(\tau_i) - U_i\}$;
2. Среднее отклонение $E_m(U) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|U(\tau_i) - U_i|$;
3. Среднее практическое отклонение $E_p(U) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|U(\tau_i) - U_i|^2$.

Для того, чтобы сделать выводы о полученных функциях, необходимо знать все эти отклонения.

На основе этого алгоритма разработаны компьютерные программы в области MathCad программирования [6].

Библиография

1. Балашов А.А. и др. *Имитационное моделирование процесса теплопереноса с учетом возможного структурного перехода в полимерном материале*. В: Труды ТГТУ. Тамбов, 2008 выпуск № 21, с. 23-25.
2. Дворецкий С. И., Егоров А. Ф., Дворецкий Д. С. *Компьютерное моделирование и оптимизация технологических процессов и оборудования*: Учеб. пособие. Тамбов: ТГТУ, 2003. 224 с.
3. Краснощеков П. С., Петров А. А. *Принципы построения моделей.* ФАЗИС: РАН, 2000. 412 с.
4. Эсбенсен К. *Анализ многомерных данных*: Сокр. пер. с англ. под ред. О.Родионовой. М.: ИПХФ РАН, 2005.
5. Нетреба Н. Н. *Исследование процесса сушки винограда бессемянных сортов с применением токов сверхвысокой частоты.* Диссертация на соискание ст. доктора техн. наук. Кишинэу, 2010, 154 с.
6. Архангельский Ю. С. *Моделирование в системе MathCAD Plus 6.0 процессов СВЧ сушки диэлектриков.* В: Электротехнологические СВЧ установки, функциональные электродинамические устройства: межвуз. науч. сб. Саратов: СГТУ, 1999, с. 77-82.