

MODELAREA MATEMATICĂ ȘI ELABORAREA SOFTWARE-LOR PENTRU SIMULAREA ÎN TIMP REAL PE CALCULATOR A PROBLEMELOR DE DINAMICĂ CU MULTE GRADE DE LIBERTATE

N. Balmuș, I. Balmuș***

**Universitatea Pedagogică de Stat, ** Universitatea Tehnică a Moldovei*

INTRODUCERE

Modelarea matematică se utilizează de mult timp în știință și tehnică. Odată cu apariția calculatoarelor electronice de ultimă generație cu volum mare de memorie operativă și viteză mare de calcul, au fost create condiții pentru desăvârșirea modelelor matematice și realizarea experimentelor numerice în baza cărora se obține informație importantă pentru științele fundamentale și tehnice. În ultimul timp modelarea matematică se implementează masiv în învățământul universitar tehnic [1].

În lucrarea dată sunt abordate unele aspecte ale modelării matematice a sistemelor mecanice oscilante cu multe grade de libertate și problemele realizării experimentelor numerice în timp real.

1. REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINALE DE ORDINUL 1

Deoarece rezolvarea unui sistem din n ecuații diferențiale de ordinul doi se poate reduce la rezolvarea unui sistem din $2n$ ecuații diferențiale de ordinul unu, vom prezenta în continuare algoritmul și metoda pentru rezolvarea sistemelor de ecuații ordinale de ordinul unu de tipul (2)

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(t, x_0, x_1, \dots, x_n), \quad j = 0..n \quad (2)$$

cu condițiile inițiale

$$t = t_0, \quad x_j = x_{0j}, \quad j = 0..n \quad (3)$$

Pentru determinarea soluției sistemului (3) în momentul $t \neq t_0$, cu precizia ε , intervalul $h = (t - t_0)$ se împarte în 2, 4, ... subdiviziuni. La fiecare etapă soluția se obține cu pași separași

De regulă, în rezultatul modelării matematice a sistemelor mecanice oscilante se obțin sisteme de ecuații diferențiale ordinale de gradul doi de tipul

$$\frac{d^2 q_j(t)}{dt^2} = F_j(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \quad j = 1..n \quad (1)$$

unde q și \dot{q} sunt coordonate și viteze generalizate; n - numărul gradelor de libertate, t - timpul.

Pentru modelarea și implementarea pe calculator în timp real a experimentelor numerice sunt necesare metode numerice efective de rezolvare a sistemelor de ecuații (1) în intervale de timp comparabile cu timpul de realizare a experimentelor reale (zeci de minute și chiar ore).

(soluția la pasul $m+1$ utilizează în calitate de condiții inițiale soluțiile obținute la pasul m). Procesul de determinare a soluțiilor se termină la etapa pentru care diferența în valoare absolută dintre soluția curentă și precedentă devine inferioară preciziei ε . La fiecare pas soluția sistemului se determină prin metoda clasică Runge-Kutta [2] generalizată pentru un sistem de ecuații diferențiale de ordinul unu.

$$x_j^{(l)} = x_j^{(0)} + \frac{h}{6}(K_j^1 + 2K_j^2 + 2K_j^3 + K_j^4) \quad (4)$$

unde

$$\begin{aligned} K_j^1 &= f_j(t_0, x_0^{(0)}, \dots, x_j^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ K_j^2 &= f_j(t_0 + 0.5h, x_0^{(0)}, \dots, (x_j^{(0)} + 0.5hK_j^1), \dots, x_n^{(0)}) \\ K_j^3 &= f_j(t_0 + 0.5h, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, (x_j^{(0)} + 0.5hK_j^2), \dots, x_n^{(0)}) \\ K_j^4 &= f_j(t_0 + 0.5h, x_1^{(0)}, \dots, (x_j^{(0)} + hK_j^3), \dots, x_n^{(0)}) \\ j &= 0..n, \quad x_j^{(l)} = x_j(t_0 + h), \quad x_j^{(0)} = x_{0j} \end{aligned}$$

Acest algoritm a fost implementat în procedura RK4m pentru mediul de programare Delphi 7.0.

În continuare prezentăm integral această procedură cu comentări succinte.

```
type vtr= array of extended;
Tftx=procedure (t:extended;x:vtr; var
f:vtr);
```

{Tftx este un tip procedural cu ajutorul căruia se declară sistemul real de ecuații diferențiale (2). Variabilele $x_0...x_n$ sunt componente ale vectorului $x:vtr$, iar $f_0...f_n$, componente ale vectorului $f:vtr$ }

```
procedure RK4m(eps,t0:extended;
x0:vtr; fnx:Tftx; var t:extended;
var x:vtr);
var n,i,j,ned,dv:integer;
h,ti:extended;
xc, xp, xi, k0,k1,k2,k3,x00,f:vtr;
p:boolean;
```

```
const cld6=1/6;
{Procedura RK4 servește pentru determinarea
soluțiilor sistemului de ecuații diferențiale cu
pasul h fixat, conform formulei (4)}
```

```
var i:integer;
begin
fnx(t0,x0,f);
for i:=0 to ned do begin
k0[i]:=h*f[i];
x00[i]:=x0[i]+k0[i]*0.5;
end;
fnx(t0+h*0.5,x00,f);
for i:=0 to ned do begin
k1[i]:=h*f[i];
x00[i]:=x0[i]+k1[i]*0.5;end;
fnx(t0+h*0.5,x00,f);
for i:=0 to ned do begin
k2[i]:=h*f[i];
x00[i]:=x0[i]+k2[i]; end;
fnx(t0+h,x00,f);
for i:=0 to ned do begin
k3[i]:=h*f[i]; end;
for i:=0 to ned do
xc[i]:=x0[i]+(k0[i]+2*k1[i]+
2*k2[i]+k3[i])*cld6;
end; {RK4}
```

```
begin {RK4m}
ned:=high(x0); dv:=ned+1;
setlength(xc,dv); setlength(xp,dv);
setlength(xi,dv); setlength(k0,dv);
setlength(k1,dv); setlength(k2,dv);
setlength(k3,dv);setlength(x00,dv);
setlength(f,dv);
n:=1;h:=t-t0;
RK4(t0,h,x0);
repeat p:=true;
for i:=0 to ned do
begin xp[i]:=xc[i];
xi[i]:=x0[i] end;
n:=n*2;h:=h*0.5; ti:=t0;
for j:=1 to n do begin
RK4(ti,h,xi); ti:=ti+h;
for i:=0 to ned do
xi[i]:=xc[i];
```

```
end;
for i:=0 to ned do
p:=p and (abs(xc[i]-xp[i])<eps);
until(p);
for i:=0 to ned do x[i]:=xc[i];
end; {RK4m}
```

Această procedură a fost testată în mediul de programare Delphi 7.0 la un calculator Pentium 4 cu frecvența de lucru 2.53GHz pentru un sistem din 500 oscilatori armonici independenți. Sistemul de ecuații diferențiale pentru acest caz are forma:

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = x_{j+1}, \quad j = 0, 2, \dots, 999$$

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = -x_{j-1}, \quad j = 1, 3, \dots, 1000$$
(5)

Pentru condițiile inițiale

$$t=0, \begin{cases} x_j = 1, & j = 0, 2, \dots, 999 \\ x_j = 0, & j = 1, 3, \dots, 1000 \end{cases}$$
(6)

soluțiile sistemului (5) cu precizia 0.00001 se obțin în 0.03 s. În cazul intervalelor mai mici de timp $h \approx 0.05$ s, utilizate pentru simulările în timp real, rezultatele se obțin practic momentan. Procedura Delphi în care se definesc ecuațiile (5) are forma:

```
Const nec=999;
procedure ff(t:extended; x:array of
extended; var f:array of extended);
var j:integer;
begin
for j:=0 to nec do
if odd(j) then
f[j]:=-x[j-1]else f[j]:=x[j+1];
end;
```

Procedura Delphi în care se rezolvă ecuațiile (5) pentru condițiile inițiale (6) în momentul de timp $t=10$ s și se afișează rezultatul în obiectul Label1, are forma:

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender:
TObject);
var t0,t:extended; i:integer;
x0,x:array[0..nec]of extended;
begin
t0:=0;t:=10;
for i:=0 to nec do if odd(i) then
xx0[i]:=0 else x0[i]:=1;
RK4m(0.00001,t0,x0,ff,t,x);
label1.Caption:='S.Nm='+
floattostr(x[0]);
end;
```

Aceste testări demonstrează eficacitatea algoritmului pentru realizare pe calculator a simulărilor în timp real a problemelor de dinamică cu multe grade de libertate, în care se cere

2. SIMULAREA ÎN TIMP REAL PE CALCULATOR A OSCILAȚIILOR PENDULULUI MATEMATIC MULTIPLU

Pendulul matematic multiplu reprezintă un sistem de puncte materiale de masă m diferită suspendate consecutiv de fire inextensibile de lungimi l diferite. Schema pendulului matematic multiplu este reprezentată în figura 1.

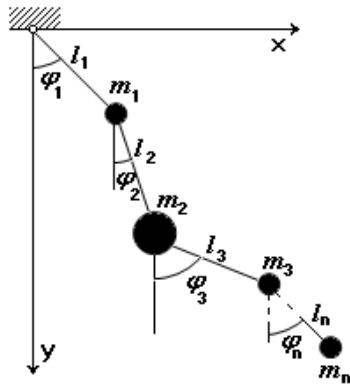


Figura 1. Schema pendulului matematic multiplu.

Ecuțiile mișcării acestui sistem mecanic cu n grade de libertate pot fi deduse utilizând formalismul Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0, i = 1..n \tag{7}$$

unde funcția Lagrange are forma:

$$L = \sum_{i=1}^n (T_i - U_i)$$

T_i și U_i sunt energiile cinetice și potențiale ale punctului material cu indicele i .

$$T_i = \frac{m_i}{2} (V_{xi}^2 + V_{yi}^2) = \frac{m_i}{2} \left(\left(\sum_{j=1}^i l_j \dot{\phi}_j \sin(\phi_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^i l_j \dot{\phi}_j \cos(\phi_j) \right)^2 \right) \tag{8}$$

rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale de tipul (1-2).

$$U_i = m_i g \sum_{j=1}^i l_j (1 - \cos(\phi_j)) \tag{9}$$

unde ϕ_j și $\dot{\phi}_j$ sunt coordonatele și vitezele generalizate pentru corpurile pendulului multiplu (abaterea de la poziția verticală și vitezele unghiulare), g - accelerația căderii libere.

Substituind expresiile (8) și (9) în (7) se obțin ecuațiile diferențiale care descriu mișcările pendulului multiplu

$$\sum_{i=1}^n \ddot{\phi}_i l_i \cos(\phi_k - \phi_i) M_{ki} + \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_i^2 l_i \sin(\phi_k - \phi_i) M_{ki} + g \sin(\phi_k) M_k^n = 0 \tag{10}$$

$k = 1..n$.
unde

$$M_k^n = \sum_{j=k}^n m_j \tag{11}$$

$$\|M_{ki}\| = \begin{vmatrix} M_1^n & M_2^n & M_3^n & \dots & M_n^n \\ M_2^n & M_2^n & M_3^n & \dots & M_n^n \\ M_3^n & M_3^n & M_3^n & \dots & M_n^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_n^n & M_n^n & M_n^n & \dots & M_n^n \end{vmatrix} \tag{12}$$

Pentru rezolvarea numerică, sistemul de ecuații diferențiale (10) trebuie să fie adus la forma explicită de tipul (1). Aceste transformări pot fi realizate utilizând metode din algebra liniară deoarece (10) reprezintă un sistem de ecuații algebrice liniare cu necunoscutele $\ddot{\phi}_i, i = 1..n$, care poate fi scris în forma:

$$\sum_{i=1}^n \ddot{\phi}_i a_{ki} = b_k, k = 1..n \tag{13}$$

unde

$$a_{ki} = l_i \cos(\phi_k - \phi_i) M_{ki} \tag{14}$$

$$b_k = - \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}_i^2 l_i \sin(\varphi_k - \varphi_i) M_{ki} - g \sin(\varphi_k) M_k^n \quad (15)$$

În caz particular, din (10) se obțin ecuațiile diferențiale, care descriu mișcările pendulului matematic simplu, dublu, triplu, etc.
Pendulul matematic simplu (n=1)

$$\ddot{\varphi}_1 = -\frac{g}{l_1} \sin(\varphi_1) \quad (16)$$

Pendulul matematic dublu (n=2)

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (17)$$

unde

$$a_{11} = l_1(m_1 + m_2), \quad a_{12} = m_2 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$a_{21} = l_1 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad a_{22} = l_2 m_2$$

$$b_1 = -m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (m_1 + m_2) g \sin(\varphi_1)$$

$$b_2 = -m_2 l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 g \sin(\varphi_2)$$

Pendulul matematic triplu (n=3)

$$\ddot{\varphi}_1 = (b_1 a_{22} a_{33} + b_2 a_{32} a_{13} + b_3 a_{12} a_{23} - b_1 a_{32} a_{23} - b_2 a_{12} a_{33} - b_3 a_{22} a_{13}) / D \quad (18)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = (b_1 a_{23} a_{31} + b_2 a_{11} a_{33} + b_3 a_{21} a_{13} - b_1 a_{21} a_{33} - b_2 a_{13} a_{31} - b_3 a_{23} a_{11}) / D \quad (19)$$

$$\ddot{\varphi}_3 = (b_1 a_{21} a_{32} + b_2 a_{12} a_{31} + b_3 a_{11} a_{22} - b_1 a_{22} a_{31} - b_2 a_{32} a_{11} - b_3 a_{21} a_{12}) / D \quad (20)$$

$$D = (a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33})$$

Coeficienții a_{ik} și b_i pentru $i, k=1,2,3$ se calculează cu ajutorul expresiilor (14) și (15) în care se utilizează următoarele elementele ale matricei

$$\|M_{ki}\| = \begin{vmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) & (m_2 + m_3) & m_3 \\ (m_2 + m_3) & (m_2 + m_3) & m_3 \\ m_3 & m_3 & m_3 \end{vmatrix}$$

Pentru $n > 3$ expresiile ecuațiilor diferențiale care descriu mișcările pendulului

matematic multiplu devin foarte voluminoase și practic nu simplifică procesul rezolvării numerice a problemei. În acest caz este mai simplu de rezolvat numeric sistemul de ecuații algebrice (12). Procedura Delphi care definește sistemului de ecuații diferențiale pentru pendulul matematic multiplu cu n grade de libertate în urma rezolvării numerice a sistemului de ecuații (12) are forma:

```

procedure ff(t:extended; x:array of
extended; var f:array of extended);
var a:array of array of extended;
b,sol: array of extended;
begin
    setlength(b,n); setlength(sol,n);

    setlength(a,n,n);
    for i:=0 to 2*n-1 do
        if not(odd(i)) then f[i]:=x[i+1];
        calcA(a); calcb(b);
{aceste proceduri calculează
coeficienții  $a_{ik}$  și  $b_i$  conform
formulelor (13-14)}
        gauss(a,b,sol);
{rezolvă sistemul de ecuații
algebrice prin metoda Gauss}
        for i:=0 to np do f[2*i+1]:=sol[i];
end;
    
```

În baza acestor proceduri a fost realizată aplicația Delphi pentru simularea în timp real pe calculator a oscilațiilor pendulului matematic multiplu. Interfața aplicației pentru pendulul matematic cu 3 grade de libertate se reproduce în figura 2.

În aplicația din figura 2 utilizatorul are posibilitate să realizeze experimente numerice pentru extragerea informație despre caracteristicile mișcării pendulului matematic triplu. Parametrii pendulului (lungimile l_1, l_2, l_3 ; masele m_1, m_2, m_3 și unghiurile de abatere a greutăților pendulelor din poziția de echilibru $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.) pot fi setați în fereastra „Parametrii sistemului de pendule”. După apăsarea butonului „Start” se declanșează în timp real procesul de oscilații a sistemul de pendule. În ferestrele din partea stângă a aplicației se desenează graficele dependenței de timp a unghiurilor de abatere a pendulelor de la poziția de echilibru. Timpul real se afișează în partea superioară a aplicației.

Pendulul matematic triplu în câmpul gravitațional omogen este un sistem mecanic conservativ în care energia totală (cinetică și potențială) trebuie să fie constantă. Această proprietate se utilizează pentru verificarea indirectă a corectitudinii metodei numerice de rezolvare a sistemului de ecuații diferențiale. În

partea superioară a aplicației se afișează în timp real diferența relativă în procente dintre energia totală

$$ET = \sum_{i=1}^n (T_i + U_i) = F(\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t), \dot{\varphi}_1(t) \dots \dot{\varphi}_n(t))$$

în momentul dat de timp și în momentul inițial de timp $(ET/ET_0-1)100\%$

Această mărime conform teoriei trebuie să fie egală cu zero. În realitate ea ușor crește pe parcursul timpului, rămânând mai mică ca 0.001% în intervalul de timp de 60 minute.

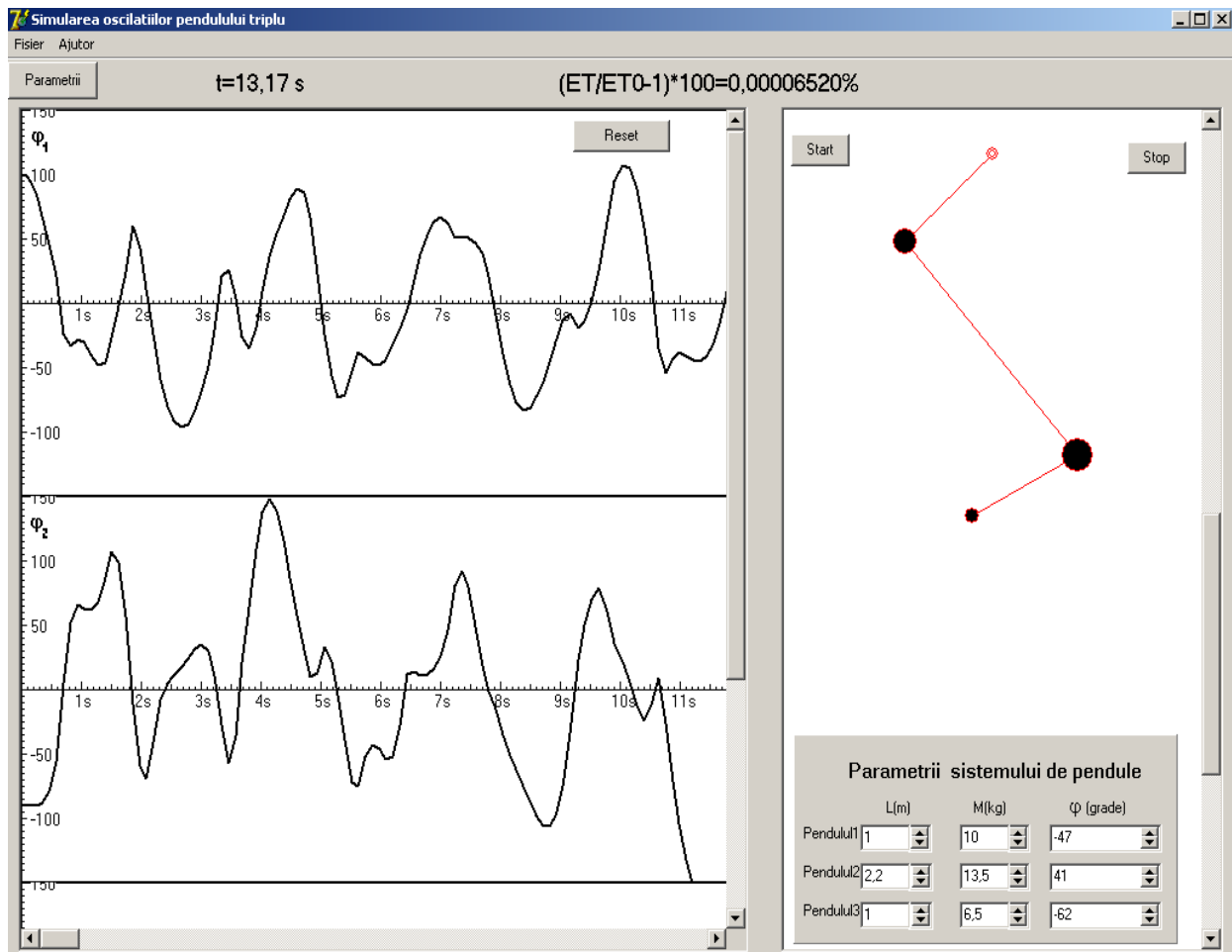


Figura 2. Interfața aplicației Delphi pentru simularea în timp real a oscilațiilor pendulului matematic triplu.

Menționăm că aplicația funcționează la fel de stabil atât pentru oscilații mici cât și mari, când abaterile pendulelor din poziția de echilibru sunt aproape de valoarea 180°. Din graficele afișate pe ecranul calculatorului se vede caracterul absolut aperiodic al oscilațiilor.

În cazul oscilațiilor mici, aplicația poate fi utilizată pentru verificarea concluziilor teoriei cu privire la existența frecvențelor proprii și a fenomenului de bătăi. Dacă $m_1 \gg m_2$, $l_1 = l_2$,

$\varphi_1 = 0$ și $\varphi_2 \ll 0$, în conformitate cu teoria [2] se observă fenomenul de bătăi (figura 3).

Calculatorul Pentium 4 cu frecvența de lucru 2.53GHz permite realizarea stabilă a experimentului numeric pentru un sistem de pendule matematice cu numărul gradelor de libertate ≤ 10 . Pentru un număr mai mare de grade de libertate este necesar un calculator cu caracteristici mai performante.

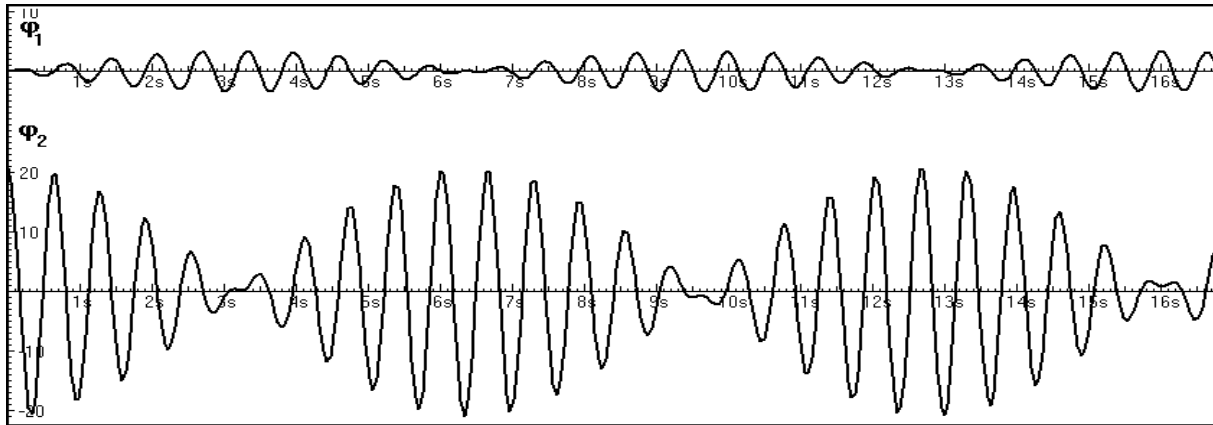


Figura 3. Fenomenul de bătaii în oscilațiile pendulului dublu.

3. SIMULAREA ÎN TIMP REAL PE CALCULATOR A OSCILAȚIILOR UNUI SISTEM DE PENDULE GRAVITAȚIONALE CUPLATE.

Schema sistemului din n pendule gravitaționale de lungimi l_i și mase m_i diferite, cuplate prin intermediul a $(n-1)$ resorturi de rigiditatea k este reprezentată în figura 4.

Alegând în calitate de coordonate generalizate unghiurile de abatere φ a pendulelor de la poziția de echilibru obținem în baza

formalismului Lagrange (7) următoarele ecuații diferențiale ale mișcării:

$$\ddot{\varphi}_i = -\frac{g}{l_i} \sin(\varphi_i) - \frac{1}{l_i^2 m_i} \frac{\partial V}{\partial \varphi_i}, \quad (21)$$

$$i = 1, \dots, n$$

unde V este energia potențială a resorturilor deformate.

Considerând că în poziția de echilibru, resorturile nu sunt deformate și au lungimea a egală cu distanța dintre punctele de suspenzie a pendulelor scriem în formă explicită expresia (22) pentru energia potențială a resorturilor deformate.

$$V(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sqrt{(a + b \sin(\varphi_{i+1}) - b \sin(\varphi_i))^2 + (b \cos(\varphi_{i+1}) - b \cos(\varphi_i))^2} - a \right)^2 \quad (22)$$

unde b este distanța de la punctul de inserție a resorturilor până la punctul de suspenzie a pendulelor.

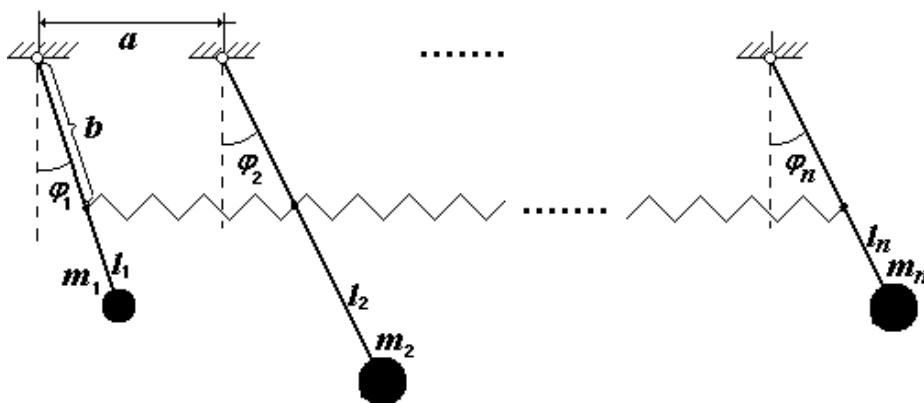


Figura 4. Schema sistemului de pendule matematice cuplate

În caz general forma explicită a ecuațiilor (21) este foarte complicată din cauza expresiilor voluminoase a derivatelor parțiale $\partial V / \partial \varphi_i$ calculate din (22). Pentru rezolvarea numerică a sistemului de ecuații diferențiale (21) este mai

rentabil de calculat numeric aceste derivatele parțiale.

Procedura Delphi care definește sistemului de ecuații diferențiale pentru sistemul de n pendule cuplate are forma:

```

procedure fpm(t:extended;x:array of extended;var
f:array of extended);
var i:integer; xp,vd,eps:extended;
ff:array of extended;
begin
  eps:=1e-6
  setlength(ff,high(x)+1);
  for i:=0 to nec do
  if not(odd(i)) then f[i]:=x[i+1];
  for i:=0 to 2*np-1 do
  if not odd(i) then
  {următoarele instrucțiuni calculează numeric
derivata parțială cu pasul eps }
  begin
    xp:=x[i]; x[i]:=xp+eps;
    vd:=v(x); x[i]:=xp;
    ff[i+1]:=(vd-v(x))/eps;
  end;
  for i:=1 to np do
  f[2*i-1]:=-g/l[i]*sin(x[2*i-2])-
ff[2*i-1]/m[i]/sqr(l[i]);
end;
function v(x:array of extended):extended;

```

```

{În această procedură se definește energia
potențială a arcelor deformată în
conformitate cu expresia (21)}
var s:extended;i:integer;
begin
  s:=0;
  for i:=1 to np do
  s:=s+ sqrt(sqrt(sqr(a+b*sin(x[2*i])-
b*sin(x[2*i-2])))+
sqr(b*cos(x[2*i])-
b*cos(x[2*i-2]))) -a);
  v:=0.5*k*s;
end;

```

În baza acestei proceduri și a procedurilor descrise în compartimentul 1 al lucrării a fost realizată aplicația Delphi pentru simularea în timp real pe calculator a oscilațiilor sistemului de pendule gravitaționale cuplate. Calculatorul Pentium 4 cu frecvența de lucru 2.53GHz permite realizarea stabilă a experimentului numeric pentru un sistem de 25 pendule gravitaționale cuplate.

Interfața aplicației pentru sistemul de 3 pendule gravitaționale cuplate se reproduce în figura 5.

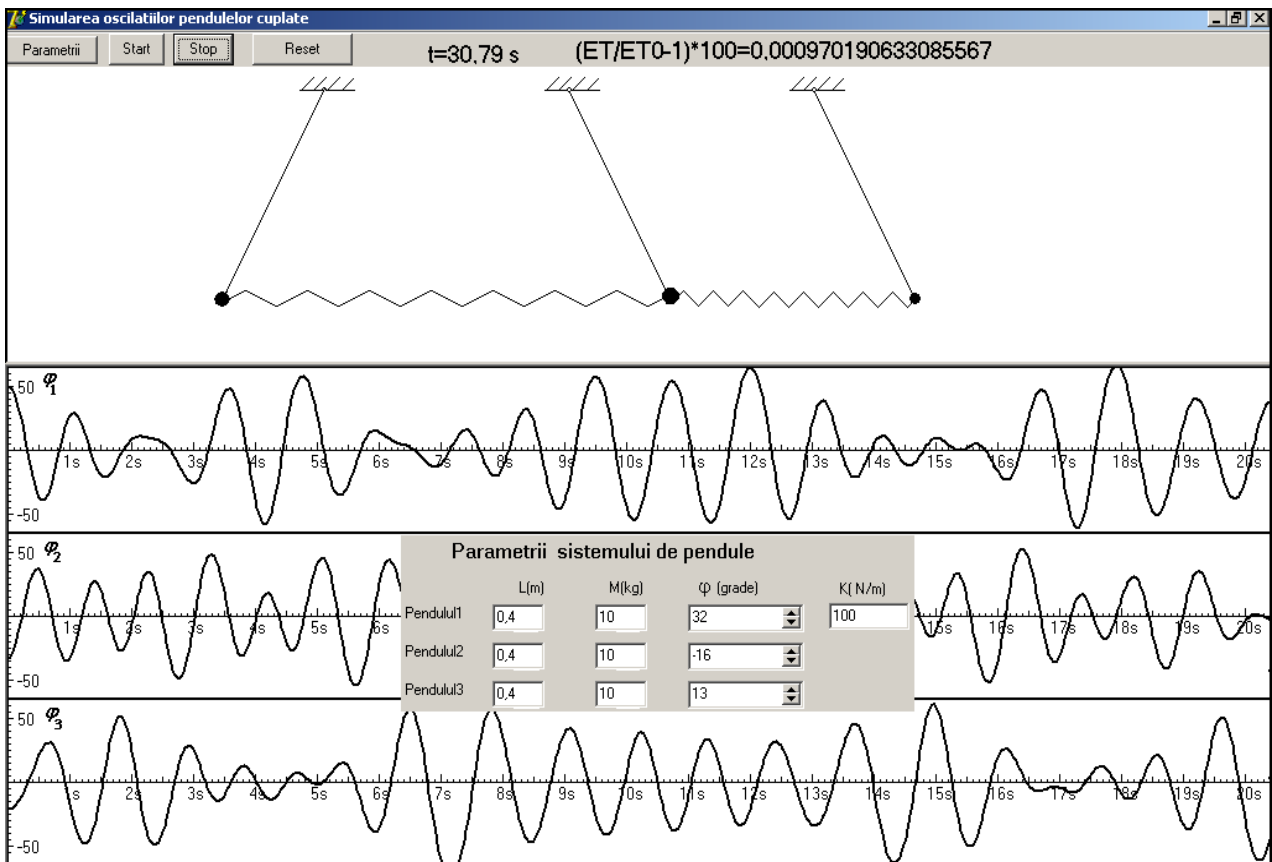


Figura 5. Interfața aplicației Delphi pentru simularea în timp real a oscilațiilor sistemului din 3 pendule gravitaționale cuplate.

În fereastra „Parametrii sistemului de pendule cuplate” utilizatorul stabilește în mod

interactiv parametrii sistemului (lungimea și masele pendulelor, rigiditatea resorturilor de

cuplare și abaterile din poziția verticală a fiecărui pendul. După apăsarea butonului „Start” începe procesul de simulare în timp real al oscilațiilor sistemului de pendule.

Precizia calculului numeric se verifică indirect, calculând în fiecare moment de timp energia totală a sistemului, care conform teoriei trebuie să fie constantă. În aplicație se afișează diferența relativă în procente dintre energia totală în momentul dat de timp și energia totală în momentul inițial.

Menționăm că în codul programului nu este inclusă nici o restricție cu privire la mărimea unghiurilor de abatere a pendulelor de la poziția de echilibru.

În cazul oscilațiilor mici, utilizatorul poate verifica rezultatele de bază ale teoriei sistemelor oscilante în care se observă pulsații proprii. Pentru aceasta utilizatorul trebuie să stabilească în mod convenabil condițiile inițiale.

În figura 6 sunt reprezentate două secvențe în care se observă pulsațiile proprii ale unui sistem din două pendule gravitaționale identice: $m_1=m_2=m$, $l_1=l_2=l$, $b=l$. Conform teoriei [3] pulsațiile proprii ale oscilațiilor mici pentru acest caz se calculează cu ajutorul expresiilor

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}$$

Pentru $m=1$ kg, $l=1$ m, $k=10$ N/m. și $g=9.81$ m/s² obținem următoarele valori ale perioadelor oscilațiilor proprii: $T_1=2.005$ s și $T_2=1.150$ s. Aceste valori se confirmă cu precizie înaltă în reprezentările grafice din figura 6 obținute în rezultatul experimentului numeric. În cazul $\frac{k}{m} < \frac{g}{2l}$ se observă fenomenul de bătăi cu perioada $T = 2 * \pi / (\omega_2 - \omega_1)$. Pentru $m=1$ kg, $l=1$ m, $k=2$ N/m. și $g=9.81$ m/s² obținem $T=10.75$ s. Această valoare se confirmă în figura 7 obținută în rezultatul experimentului numeric cu parametri susmenționați.

Experimentul numeric demonstrează că fenomenul de bătăi se observă nu numai pentru oscilații mici. În figura 8 este reprezentat fenomenul de bătăi pentru abateri mari ($\varphi_1 = 90^\circ, \varphi_2 = 0^\circ$) a pendulelor gravitaționale de la poziția de echilibru. Pentru aceiași parametri ca și în cazul precedent perioada bătăilor $T=16.3$ s

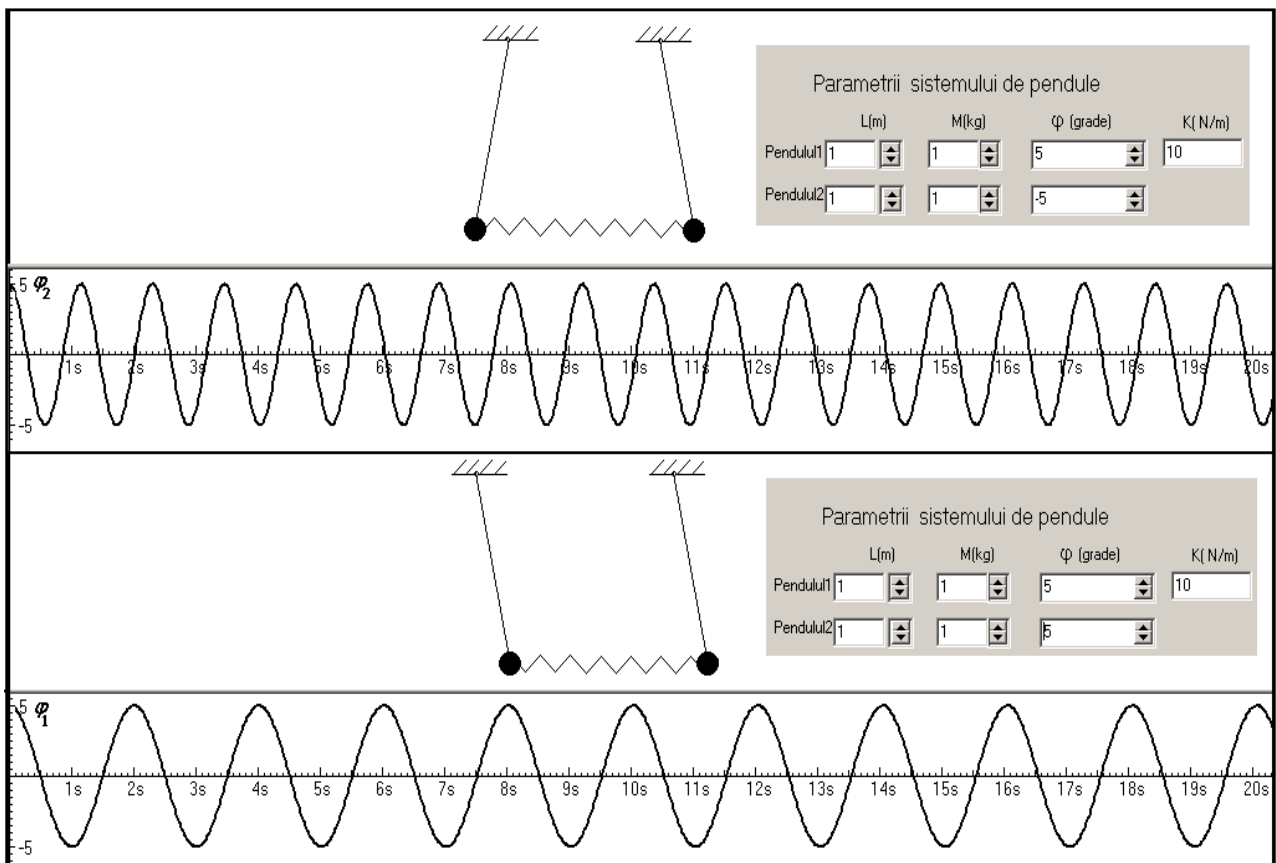


Figura 6. Pulsații proprii ale sistemului din două pendule gravitaționale cuplate

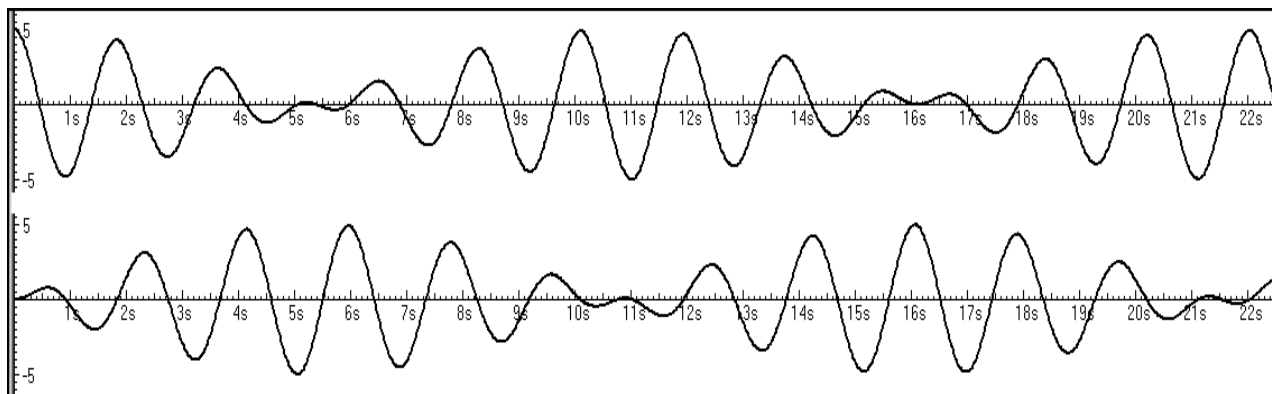


Figura 7. Fenomenul de bătăi în sistemul de două pendule gravitaționale cuplate.

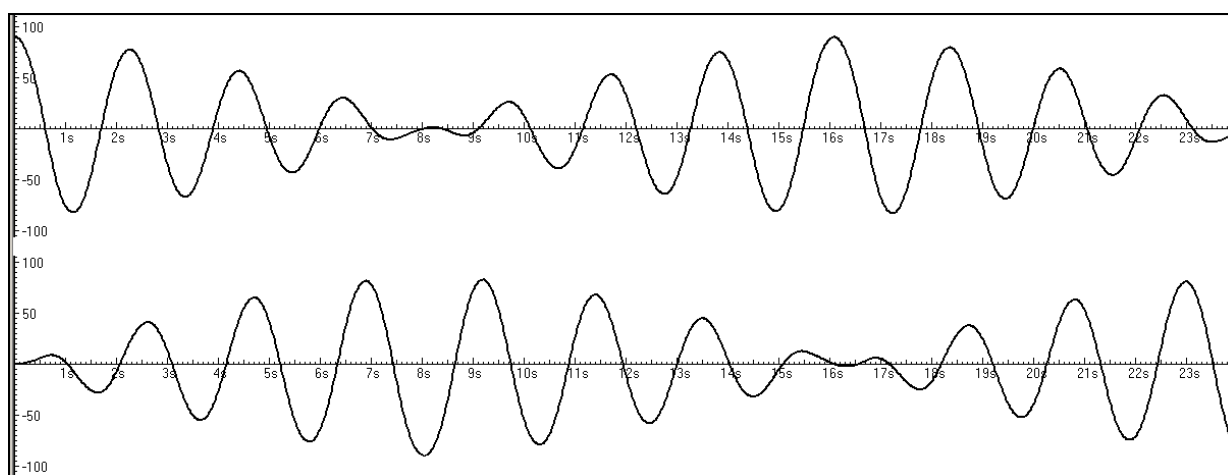


Figura 8. Fenomenul de bătăi în sistemul de două pendule gravitaționale cuplate (oscilații mari).

4. CONCLUZII

Experimentul numeric nici într-un caz nu preconizează substituirea completă a experimentului real. În caz general rezultatele experimentului numeric trebuie confruntate cu rezultatele experimentului real pentru verificarea calității modelelor matematice utilizate și a calculelor numerice. Rolul experimentului numeric în linii mari constă în completarea experimentului real cu informații care permit perfectarea calității modelelor fizice utilizate în descrierea teoretică a experimentului real.

Cu ajutorul experimentelor numerice descrise în lucrarea dată, utilizatorul poate verifica concluziile de bază ale teoriei oscilațiilor mici

(pulsatii proprii, bătăi, etc) și obține informații originale în cazul oscilațiilor mari (neliniare) pentru care teoria nu este suficient de bine dezvoltată.

Bibliografie

- 1. Зарубин В.С.** *Математическое моделирование в технике*, МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва, 2003.
Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1987.
- 2.Berbente C., Mitrăn S., Zancu S.** *Metode numeric.* // Editura tehnică, București, 1997.
- 3.Sandu M.** *Mecanică teoretică* // Editura didactică și pedagogică, București, 2002.