

# DETERMINARE VALORII ÎNCĂRCĂRII ULTIME LA PLĂCI PLANE

Elena SIDORENCO

Universitatea Tehnică a Moldovei

**Abstract:** *Se propune un program de calcul automat ce permite determinarea valorii încărcării ultime, destinat planșelor de beton armat (FEYL). Programul are la bază metoda cinematică de stabilire a capacității portante, dezvoltată de Johansen și utilizează în principiu algoritmul dezvoltat de Munro și Da Fonseca. Sunt prezentate două structuri pentru care se cunosc în literatura tehnică de specialitate valorile multiplicatorilor încărcării. Valorile obținute cu ajutorul programului propus au fost comparate cu cele clasice și s-a constatat o bună concordanță.*

**Cuvinte cheie:** *valoarea încărcării ultime, plăci plane, beton armat.*

La ora actuală există programe performante de proiectare a structurilor. Dar având în vedere că trebuie să se facă față unui număr foarte mare de structuri cu termene de existență depășite s-a căutat realizarea unor programe care să permită o reevaluare rapidă a structurilor, cu costuri minime, avându-se în vedere resursele financiare limitate de care dispun cei abilitați cu întreținerea lor.

Filozofia fundamentală propusă a fi adoptată în cazul evaluării, ca procedeu diferit de cel de proiectare, a constat în determinarea rezistenței ultime drept criteriu fundamental pentru ca o structură să fie considerată funcționabilă sau în faza de cedare. Criteriile de exploatare nefiind luate în considerare în mod obișnuit. Se consideră că la o structură existentă în decursul timpului au putut fi puse în evidență toate problemele legate de utilizarea sa și că acestea au fost rezolvate prin programele de întreținere. Deci metodele de analiză utilizate trebuie să fie capabile să evalueze cât mai realist capacitatea ultimă a structurii.

Standardele curente de exploatare au în vedere că proiectarea și evaluarea structurilor se realizează folosind în mod obișnuit tehnici ale analizei liniar-elastice. Teoria clasică de analiză în domeniul elastic este foarte bine cunoscută și înțeleasă de ingineri, existând la ora actuală multe pachete de programe de calcul în acest domeniu, în plus ea fiind considerată absolut satisfăcătoare pentru proiectare. Fiind o metodă ce conduce la valori inferioare a încărcării de cedare, este evident că teoria va conduce la valori asigurate, fiind o metodă sigură, din acest punct de vedere.

Dacă o structură a fost exploatată de-a lungul a multor ani și nu apar semne evidente de distrugere, inginerul evaluator poate fi sigur că structura poate suporta supraîncărcări semnificative, comparativ cu cele aplicate deja pe structură. Evident acest lucru nu semnifică faptul că structura poate fi încărcată la valoarea maximă a încărcării și că ea poate fi capabilă să o și susțină, atâta timp cât ea nu a fost niciodată supusă încărcării limită legale. Totuși ea arată că nu există un risc iminent de cedare pentru încărcări la care ea deja a fost supusă. O ipoteză fundamentală este aceea că modul de cedare se produce prin încovoiere, structura fiind suficient de ductilă pentru a permite formarea unui asemenea mecanism. Cedarea prin forfecare se poate produce într-un mod casant fără a fi anunțată iminența producerii ei.

Teoria Plasticității se bazează în acest caz pe observația că betonul cedează de-a lungul unor plane. Aceste plane lunecă separat unele în raport cu celelalte în timpul cedării. Dacă se consideră că betonul este un material ductil, capabil să asigure redistribuirea eforturilor de-a lungul planelor de cedare, atunci poate fi aplicată teoria plasticității. Problema este cât timp această presupunere este valabilă. Criteriul de cedare Mohr-Coulomb modificat, cu care se obține valoarea tensiunii limită, este una dintre ipotezele cele mai puțin controversate. Toate zonele delimitate de liniile de rupere sunt considerate rigide. Se poate considera că poate apare starea plană de tensiune/deformație de-a lungul planelor de cedare, în funcție de opțiunile utilizatorului.

Betonul simplu este un material casant, în timp ce betonul armat nu este neapărat casant. Cedarea prin forfecare a grinzilor conținând cantități rezonabile de armătură longitudinală și transversală nu este în general atât de casantă pe cât ne-am fi așteptat. Depășirea valorii ultime a încărcării produce o degradare a structurii cu multă energie internă disipată în urma unei variații rezonabile a deplasărilor structurii. În astfel de cazuri, teoria plasticității poate fi o alegere viabilă. Totuși în cazurile în care armarea nu se găsește în domeniul "rezonabil" devine necesară discuția privind utilizarea teoriei plasticității. De pildă, în fiecare din cazurile de supra- sau subarmare a secțiunilor devine neadecvată o analiză plastică, datorită fragilității cedării. În plus, absența etrierilor sugerează o severă limitare a ductilității unor astfel de structuri.

Încurajați de rezultatele obținute la nivel mondial, s-a realizat un program de calcul automat FEYL (Finite Element Yield-Line) ce permite determinarea valorii ultime a încărcării în cazul planșelor de beton armat

cunoscându-se procentele de armare utilizate la armarea planșeului, modurile de rezemare și evident dimensiunile structurii.

În program se folosește de fapt tehnica de discretizare în elemente finite triunghiulare a planșeului. Pentru o structură dată se poate realiza discretizarea automat. În fapt este vorba de programare liniară, problema determinării valorii încărcării ultime fiind una de optimizare liniară, punându-se problema stabilirii valorii minime a energiei disipate în structură. Este folosită metoda liniilor de rupere, iar drept criteriu de curgere cel în trepte al lui Johansen.

O linie din planul plăcii în raport cu care se produc rotații plastice și de-a lungul căreia barele de armare intră în curgere este considerată o linie de rupere. Se consideră că barele ce intersectează linia de rupere, după ambele direcții de armare, intră în curgere. Valoarea ultimă a momentului, ce apare după anumite unghiuri în raport cu direcțiile de armare, se consideră că poate fi exprimată în funcție de valorile momentelor ultime ale celor două rețele de armare.

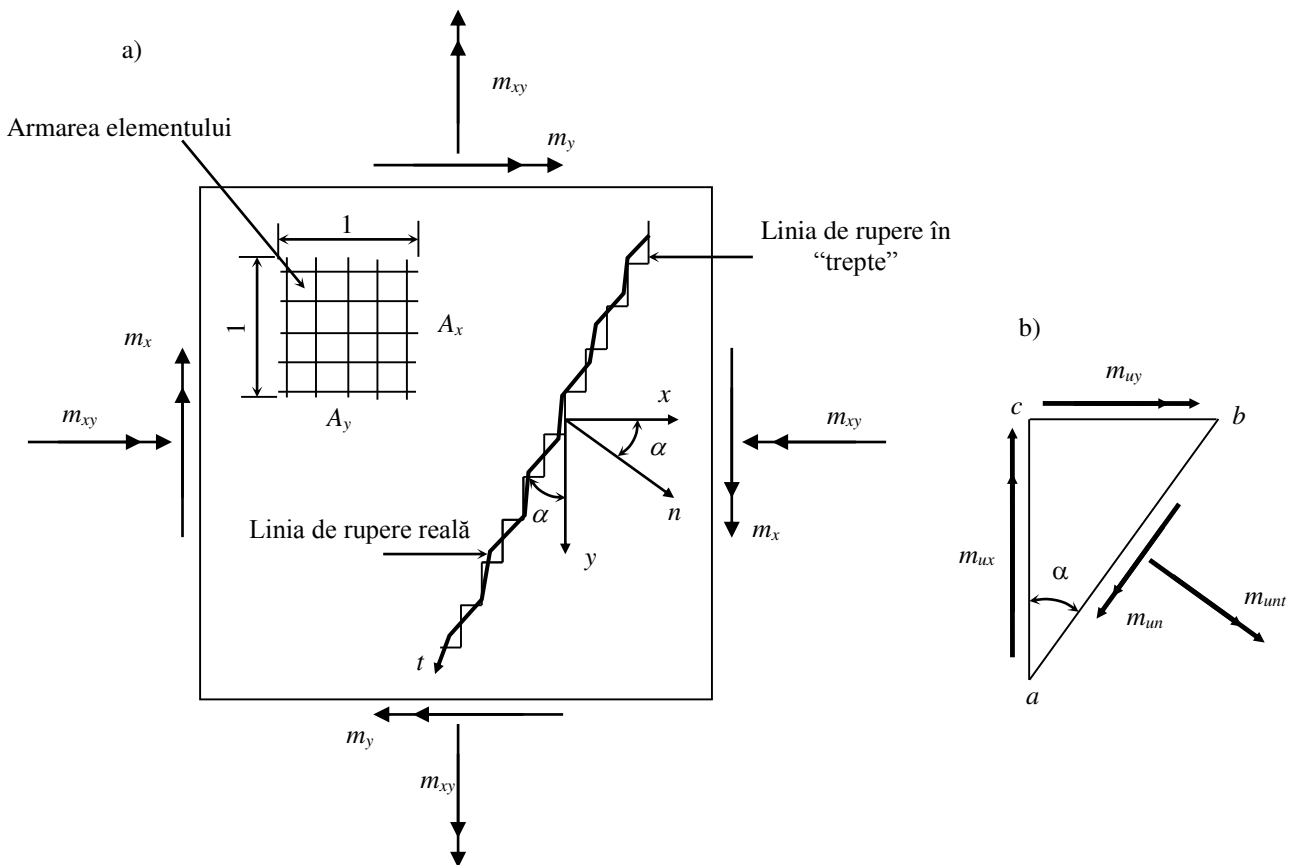


Fig.1

În fig.1a este reprezentat un element de placă supus acțiunii unor momente încovoietoare. În placă se dezvoltă o linie de rupere a cărei direcție este dată de  $t$ , care face unghiul  $\alpha$  cu direcția de armare  $y$ . Linia reală de rupere este înlocuită de o linie frântă formată din drepte paralele cu direcțiile de armare  $x$  și  $y$  și ce "îmbracă" linia reală de rupere. Se formează astfel rețeaua "în trepte". În fig.1. b s-a desenat un element triunghiular  $abc$  format de-a lungul liniei de rupere, pe laturile căruia se dezvoltă, conform ipotezei, valorile ultime pentru momente ( $m_{ux}$ ,  $m_{uy}$ ). Valoarea momentului normal ultim ( $m_{un}$ ) se obține din ecuația de echilibru pe direcția  $ab$  :

$$m_{un}ab = m_{ux}accos\alpha + m_{uy}bcsin\alpha \quad \rightarrow \quad m_{un} = m_{ux}cos^2\alpha + m_{uy}sin^2\alpha \quad (1)$$

Este evident că echilibrul elementului impune existența unui moment de torsiune  $m_{unt}$  de-a lungul liniei de rupere, a cărui expresie este, în cazul general :

$$m_{unt}ab = m_{ux}acsin\alpha - m_{uy}bccos\alpha \quad \rightarrow \quad m_{unt} = (m_{ux} - m_{uy}) sin\alpha cos\alpha \quad (2)$$

Se observă că dacă  $m_{ux} = m_{uy} = m_u$  (caz cunoscut sub denumirea de “armare izotropă”), atunci va rezulta și :  $m_{un} = m_u$  și  $m_{nt} = 0$ .

Criteriul de curgere consideră că elementul atinge capacitatea sa de rezistență atunci când momentul normal  $m_n$  produs de momentele efective ce apar din acțiunea încărcărilor exterioare ( $m_x$ ,  $m_y$  și  $m_{xy}$ ) devine egal cu valoarea ultimă a momentului normal ( $m_{un}$ ).

Este necesar să reamintim expresiile momentelor încovoietoare și de torsiune în raport cu axele rotite cu unghiul  $\alpha$  față de direcția  $x$  a elementului inițial (fig.2).

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + m_{xy} \sin 2\alpha, \quad m_{nt} = \frac{1}{2} (m_x - m_y) \sin 2\alpha - m_{xy} \cos 2\alpha.$$

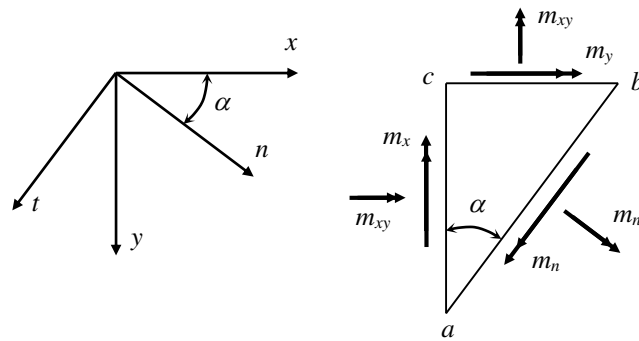


Fig. 2

În aceste condiții, criteriul normal de curgere aplicat unui element, impune satisfacerea inecuației :

$$m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + m_{xy} \sin 2\alpha \leq m_{ux} \cos^2 \alpha + m_{uy} \sin^2 \alpha \quad (3)$$

Dacă există mai multe benzi de armătură vom putea scrie :

$$m_n = \sum_{i=1}^n m_i \cos^2 \alpha_i \quad (4)$$

$$m_{nt} = \sum_{i=1}^n m_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i \quad (5)$$

În cazul betonului armat relația de calcul suficientă este (4) atâta timp cât singura deformație care se produce este rotirea normală  $\theta_n$ .

Sub această formă, criteriul de curgere n-ar putea satisface cerințele unei analize la starea limită; de aceea este uzuală exprimarea momentelor de curgere în funcție de momentele principale ce apar în orice punct al unui câmp de tensiune. Una din rațiunile acestei exprimări este dată de faptul că momentele principale într-un punct definesc complet starea de tensiune din jurul punctul respectiv.

Abordarea analizei stării limite plastice a plăcilor cu condiții de plastificare liniarizate, prin intermediul elementelor finite conduce la un sistem de ecuații liniar. Pot fi definite două programe liniare cu ajutorul unor câmpuri de funcții acceptate care în anumite condiții fac ca respectivele programe să conducă la soluții apropiate valorii reale. În consecință metoda inițială a liniilor de rupere poate fi asociată reprezentării prin metoda elementelor finite prin impunerea ca liniile de rupere să se găsească pe liniile de contur ale rețelei. Variabilele cinematice sunt asociate unui mecanism de cedare, care nu este necesar să reprezinte deformațiile dinainte sau după cedare. Pentru identificarea mecanismului de cedare se face presupunerea că *deformațiile elementului sunt limitate pe contur de apariția deformațiilor plastice*. Valoarea încărcării ultime poate fi obținută fără a fi necesară determinarea deformațiilor elastoplastice în faza inițierii cedării plastice, cu condiția ca *deplasările să fie suficient de mici* astfel încât analiza la starea limită să fie realizată pe structura nedeformată. Este evident că nu se pune problema apariției fenomenului de pierdere a stabilității. În aceste condiții variabilele cinematice într-o formulare prin element finit a metodei liniilor de rupere sunt cele ce definesc modurile de deformare. Soluția problemei este *valoarea încărcării care conduce la cedarea plastică a modelului* de element finit și se obține atunci când liniile de rupere ale modelului se regăsesc pe marginile

elementelor. Se obțin, de regulă, valori superioare încărcării de cedare. Doar în situația în care configurația de cedare folosită inițial coincide cu configurația finală de cedare, se obține valoarea reală a încărcării ultime.

S-au efectuat și testări ale programului, comparându-se valorile obținute pentru încărcarea ultimă cu programul FEYL cu cele obținute prin rularea acelorași structuri cu ADINA, respectiv prin compararea cu rezultatele obținute de alți cercetători.

Se prezintă în continuare două astfel de teste :

1. Planșeu, armat izotrop, acționat de o încărcare uniform distribuită. Configurația planșeului este dreptunghiulară (fig. 3.a).

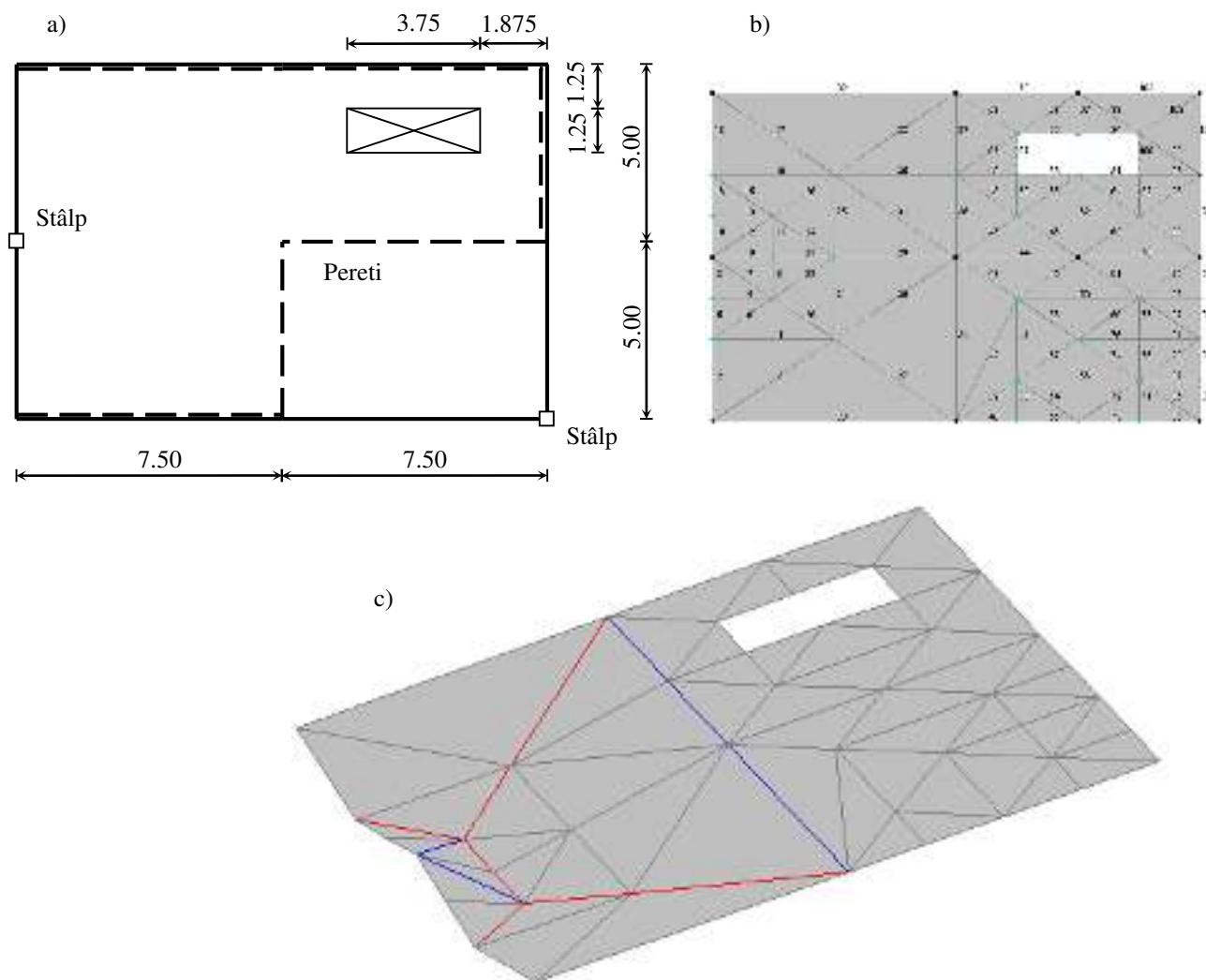


Fig.3

După cum se observă el este simplu rezemat pe latura lungă superioară și pe jumătate din latura lungă inferioară, cealaltă jumătate fiind liberă. La colțul din dreapta jos rezemarea se realizează cu ajutorul unui stâlp. În ceea ce privește celelalte două laturi, cea din stânga este liberă, existând un stâlp dispus la mijlocul ei, în timp ce pentru cea din dreapta, există simplă rezemare pe jumătatea ei superioară, pe cealalta jumătate latura fiind liberă. Există un gol interior în planșeu precum și două ziduri interioare (marcate cu linie punctată) pe care placa se sprijină.

Baclund a analizat această placă, în lucrarea sa de doctorat, folosind un calcul biografic al structurii (creșterea încărcării în trepte până la atingerea valorii de cedare) și a obținut pentru multiplicatorul încărcării valoarea (6):

$$p_u = 0,38 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \lambda_{\text{static}} = 0,38 \quad (6)$$

Utilizarea programului FEYL, folosind discretizarea din fig.3b, a condus la configurația de cedare din fig.3. c și la o valoare a multiplicatorului încărcării egală cu (7) :

$$\lambda = 0,405. \quad (7)$$

Se observă că se depășește doar cu 6,6 procente valoarea obținută prin calculul static.

2. Placă de formă oarecare (fig.4), cu gol interior, acționată de o încărcare uniform distribuită.

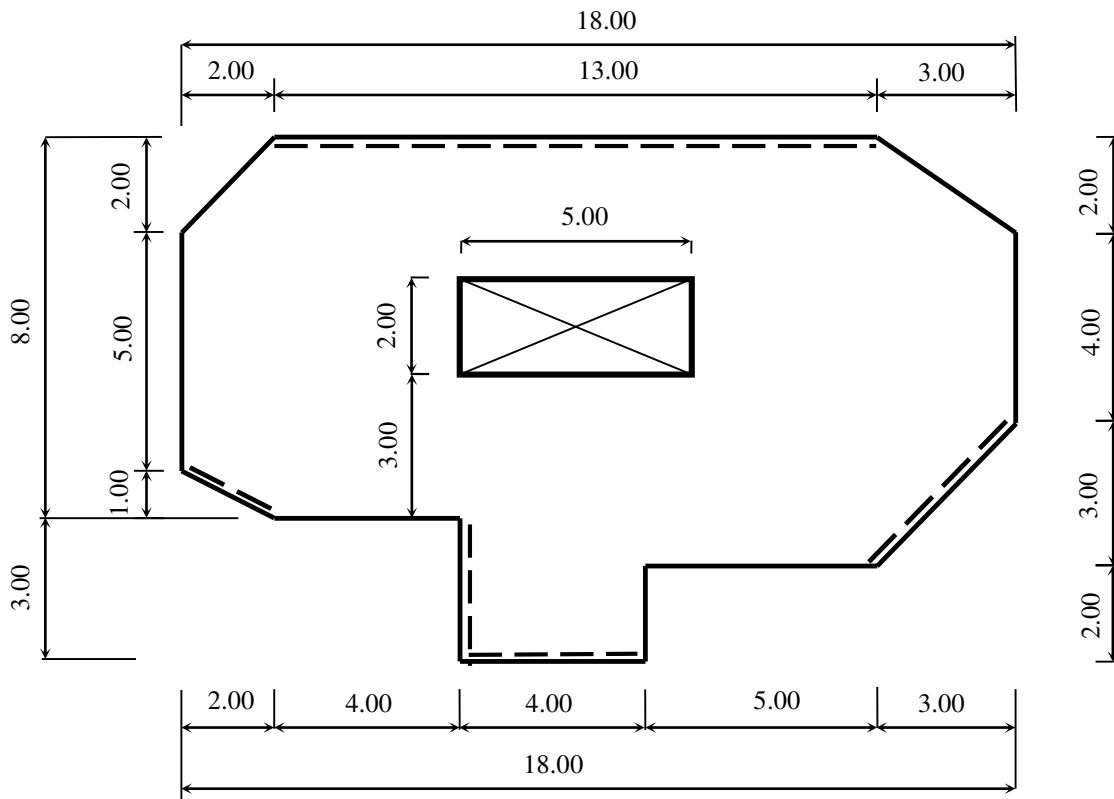


Fig.4

Pentru placa din fig.4 s-a găsit pentru multiplicatorul încărcării folosind o metodă performantă de determinare prin metoda statică a valorii încărcării ultime valoarea (8) :

$$\lambda_s = 0,148 \quad (8)$$

Utilizându-se aceleași discretizări, ca și în abordarea statică, prin utilizarea programului FEYL (fig.5a și 5b) s-au obținut rezultatele următoare :

– pentru o discretizare mai grosieră (fig.5a) valoarea multiplicatorului încărcării a fost (9) :

$$\lambda_{c1} = 0,153 , \quad (9)$$

iar configurația de cedare este cea arătată în fig.5.b.

– pentru o discretizare mai fină (fig.6a) s-a obținut :

$$\lambda_{c2} = 0,151 \quad (10)$$

respectiv configurația de cedare din fig.6b.

Avantajul principal al programului de calcul este acela că oferă cu o relativă acuratețe valoarea încărcării ultime pentru o placă, fără a fi necesare multe date de intrare. Un alt avantaj este acela că valoarea încărcării ultime nu este puternic influențată de gradul de discretizare al structurii, atâta timp cât cele două discretizări sunt în vecinătatea configurației de cedare.

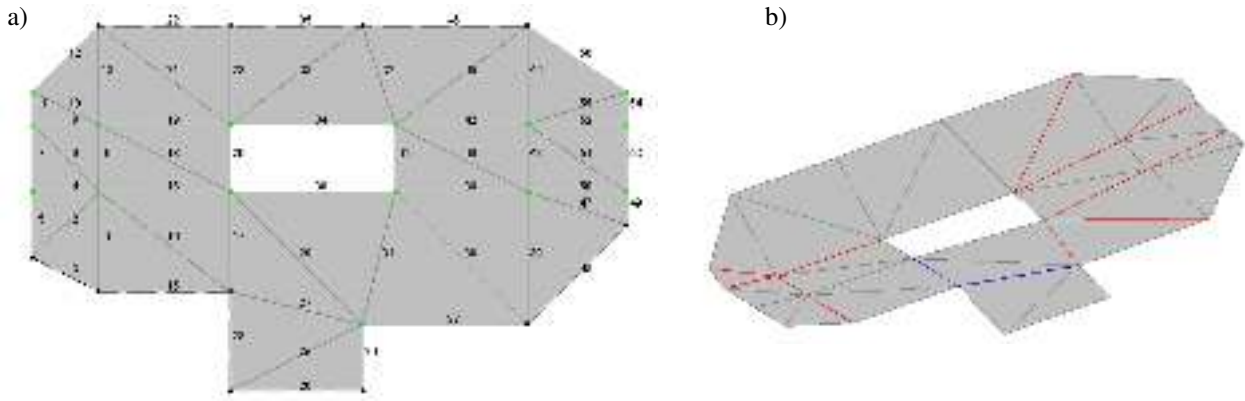


Fig.5

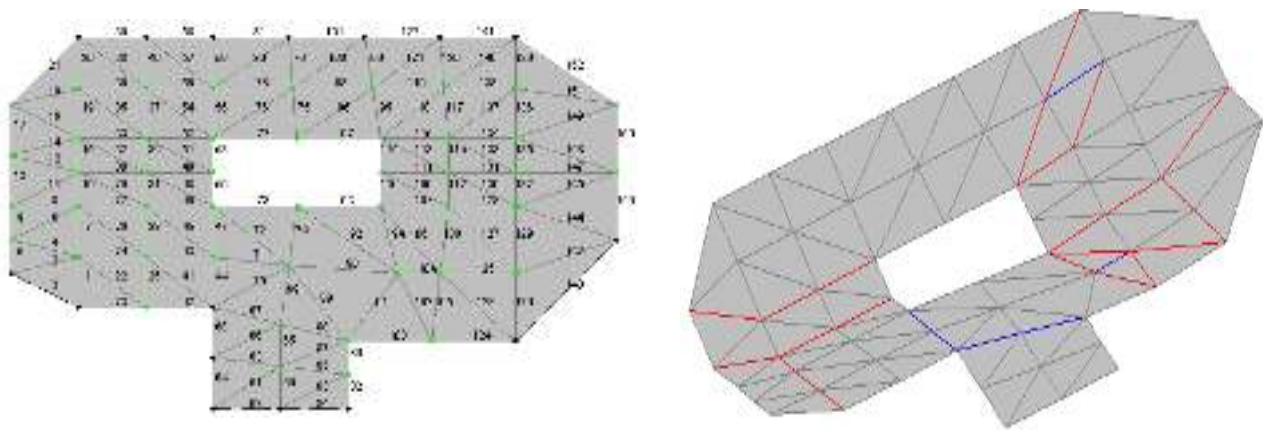


Fig.6

Cel mai mare dezavantaj este legat de faptul că fiind o metoda cinematică de calcul se obțin valori superioare încărcării de cedare reale. Ca o primă măsură pentru remedierea acestui dezavantaj se aplică rezultatelor regula celor 10 procente, în sensul că valoarea încărcării ultime obținute prin utilizarea programului este redusă cu 10% .

### Bibliografie

1. Anderhaggen, E., Knöpfel, H. *Finite element limit analysis using linear programming*. International Journal of Solids Structures, vol. 8, 1972, pp.1413-1431.
2. Bäcklund, J., *Finite element analysis of non-linear structures*, Thesis, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg, 1973.
3. Ieremia, M. *Elasticitate. Plasticitate. Neliniaritate*. Editura PRINTECH, Bucuresti, 1998.
4. Iordache, D., Teza de Doctorat *Contribuții la teoria liniilor de articulații plastice la plăcile plane de diferite forme și cu diferite încărcări*, București, 17.11.2003.
5. Iordache, D., Ieremia, M. *Determinarea valorii ultime a încărcării pentru plăci poligonale convexe*, Buletinul Științific al UTCB, Nr.3, 2003, pag.73-87.
6. Johansen, K.W. *Yield Line Theory*, Cement and Concrete Association, Londra, 1962.
7. Munro, J., Da Fonseca, A.M.A, *Yield line method by finite elements and linear programming*, The Structural Engineer, June 1978, No.2, Volume 56B, pp.37-44.
8. Park, T., Gamble, W., *Reinforced Concrete Slabs*, Wiley, 2<sup>nd</sup> Edition, Cap. 5,6,7,8.
9. <http://www.rcc-info.org.uk/download/Yieldline/YieldLineExtract.pdf>.