

СПИРАЛИ. ГРАФИКИ. СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ

Вячеслав РУСУ, Аурика ПОПЕСКУ

Технический Университет Молдовы

Аннотация: В этой работе исследуются спирали: спираль Архимеда, логарифмическая спираль, гиперболическая спираль, спираль Корню. Также свойства спиралей: длина и площадь одного витка. Спираль Архимеда, логарифмическая спираль, гиперболическая спираль, спираль Корню имеют множественное применение в жизни, зачастую их можно наблюдать в природе. Используются в строительстве, архитектуре, океанологии, метеоисследованиях, геодезических работах.

Ключевые слова: спираль, приложения, свойства, формула, «золотой прямоугольник», кривая.

1. Спираль Архимеда.

Спираль была исследована Архимедом, в III веке до н.э., когда он экспериментировал с компасом. Он тянул стрелку компаса с постоянной скоростью, вращая сам компас по часовой стрелке.

Кривую можно рассматривать как траекторию точки, равномерно движущейся по лучу, исходящему из полюса, в то время как этот луч равномерно вращается вокруг полюса.

Спираль изображена на рисунках 1а и 1б.

1.1 Формула спирали: $\rho = \alpha\varphi$ (1.1.)

1.2 Площадь фигуры: $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$; $S = \frac{3}{4} \pi^3 a^2$ (кв. ед.) (1.2.)

1.3 Длина спирали: $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi$; $L = \pi a \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{a}{2} \ln|2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}|$ (ед. дл.) (1.3.)

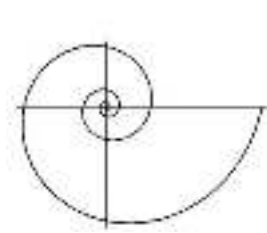


Рис. 1а

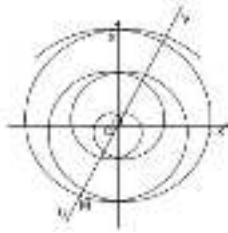


Рис. 1б

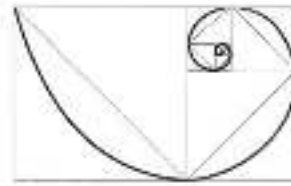


Рис. 2а

2. Логарифмическая спираль.

Логарифмическая спираль была впервые описана Декартом. Декарт искал кривую, обладающую свойством, подобным свойству окружности, так чтобы касательная в каждой точке образовывала с радиус-вектором в каждой точке один и тот же угол.

Кривая, которая пересекает все лучи, выходящие из одной точки О, под одним и тем же углом. Спираль строится с помощью «золотого прямоугольника».

Спираль можно рассмотреть на рисунках 2а и 2б.

2.1 Формула спирали: $\rho = ae^{m\varphi}$ (2.1.)

2.2 Площадь фигуры: $A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$; $A = \frac{a^2}{4m} (e^{4\pi m} - 1)$ (кв. ед.) (2.2.)

2.3 Длина спирали: $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi$; $L = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m} (e^{4\pi m} - 1)$ (ед. дл.) (2.3.)



Рис. 2б

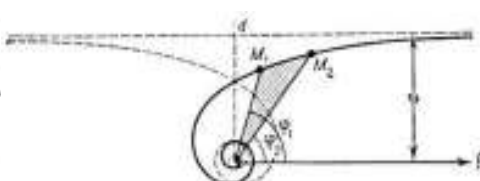


Рис. 3



Рис. 4

3. Гиперболическая спираль.

Плоская трансцендентная кривая.

Гиперболическая спираль получается при движении точки по вращающейся прямой таким образом, что ее расстояние от центра вращения всегда будет обратно пропорционально углу поворота прямой, измеренному от начального положения.

Гиперболическая спираль представлена на рис. 3

$$3.1.1 \text{ Формула гиперболической спирали: } \rho = \frac{a}{\varphi} \quad (3.1.)$$

$$3.1.2 \text{ Площадь фигуры: } A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi; A = -\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\varphi_2} - \frac{1}{\varphi_1} \right) \text{ (кв. ед.)} \quad (3.2.)$$

$$3.1.3 \text{ Длина спирали: } L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\varphi; L = a \left(-\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi} + \ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}) \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \text{ (ед. дл.)} \quad (3.3.)$$

4. Спираль Корню (клотоида).

Кривая, у которой кривизна изменяется линейно как функция длины дуги. Длину клотоиды рассчитать невозможно, так как она бесконечна. Это одно из самых главных свойств данной спирали.

Спираль видно на 4-м рисунке.

$$4.1 \text{ Формула спирали Корню: } \rho = \frac{A^2}{L} \quad (4.1.)$$

$$4.2. \text{ Параметрические уравнения: } S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt, C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt \quad (4.2.)$$

5. Свойства и приложения.

5.1 Спираль Архимеда: винт; передача воды в оросительные каналы из водоемов; винтовой ротор («улитка»), который используется в мясорубке. Приложения – геодезические механизмы, космические и медицинские исследования.

5.2 Логарифмическая спираль: спираль раковин, моллюсков; штормы и ураганы; расположение семечек в подсолнечнике, ромашки, капуста. Приложения – океанология, метеоисследования, строительство и архитектура.

5.3 Гиперболическая спираль и спираль Корню: паутина паука; ножи в различных режущих машинках; раковины улиток. Приложения – нахождение амплитуды колебаний (в оптике, в строительстве, в строительстве мостов), интенсивности света с преградами и без, дорожное строительство для расчета изгиба дорог в целях безопасности, спортивные гоночные трассы, американские горки.



Рис. 5а



Рис. 5б



Рис. 5в



Рис. 5г



Рис. 5д



Рис. 5е



Рис. 5ж

Библиография

1. Weisstein, Eric W. *Archimede's spiral*, 2000
2. Фихтенгольц Г.М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*; том I,II- М.: Наука, 1999
3. Виноградов, И.М., *Математическая энциклопедия*. т.3 - М.: «Советская энциклопедия», 1982