

## ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СТИМУЛИРОВАННОЙ РАМАНОВСКОЙ АТОМНО–МОЛЕКУЛЯРНОЙ КОНВЕРСИИ

Зинган А.П., Хаджи П.И.

Государственный Университет им. Т.Г. Шевченко, Молдова,

Тирасполь, ул. 25 Октября, 128

Институт прикладной физики АНМ, Молдова, Кишинёв, ул. Академией, 5

[fmfdekan@spsu.ru](mailto:fmfdekan@spsu.ru)

**Abstract:** *We have obtained the nonlinear equation for the production rate of heteronuclear molecules depending on the initial densities of particles and phase difference. It is shown that the conversion has the periodical and aperiodical regimes. The amplitude and period of oscillations of the molecular density is defined by the initial conditions.*

**Ключевые слова:** *Бозе-эйнштейновская конденсация, атомно-молекулярная конверсия, плотности частиц.*

### I. Введение

В настоящее время особый интерес представляет исследование динамики связанных атомно–молекулярных бозе–эйнштейновских конденсатов. В [1, 2] был изучен процесс конверсии двух одинаковых атомов в гомоядерную молекулу в присутствии двух импульсов резонансного лазерного излучения. Было показано, что имеют место как периодический, так и аperiodический режимы конверсии.

К настоящему времени наблюдалось связывание атомов в гомоядерные молекулы  $K_2$  [3],  $Li_2$  [4],  $Cs_2$  [5] и др.. Большим успехом является наблюдение не только гомоядерных молекул, но также и гетероядерных, состоящих из двух различных атомов. При этом наблюдалась атомно–молекулярная конверсия в Ферми–Ферми, Бозе–Бозе и Ферми–Бозе смесях атомов с образованием гетероядерных молекул  ${}^6Li{}^{40}K$  [6],  ${}^6Li{}^{23}Na$  [7],  ${}^7Li{}^{133}Cs$  [8],  ${}^{23}Na{}^{133}Cs$  [9],  ${}^{85}Rb{}^{133}Cs$  [10],  ${}^{39}K{}^{85}Rb$  [11] и др.. Большинство экспериментов было нацелено на обнаружение двухатомных гомоядерных либо гетероядерных молекул. Однако, совсем недавно наблюдались гомоядерный тетрамер  $Cs_4$  [12] и трёхатомная гетероядерная молекула  ${}^{87}Rb{}^{40}K{}^6Li$  [13]. Это обстоятельство свидетельствует о возможности образования и более сложных молекул в условиях бозе–конденсации.

### II. Основная часть

Цель данной работы состоит в исследовании особенностей стимулированной рамановской атомно–молекулярной конверсии с образованием гетероядерной молекулы как единого, одноступенчатого процесса. Пусть два различных бозе–конденсированных атома  $a_1$  и  $a_2$  с энергиями  $\hbar\omega_{01}$  и  $\hbar\omega_{02}$  переходят в основное состояние гетероядерной молекулы  $b$  с энергией  $\hbar\Omega_0$  через возбуждённое состояние молекулы  $E_u$ , одновременно поглощая и излучая кванты света  $c_1$  и  $c_2$  с энергиями  $\hbar\omega_1$  и  $\hbar\omega_2$  соответственно (рис.1). Изучаемый процесс можно представить в виде реакции  $a_1 + a_2 + c_1 \leftrightarrow b + c_2$ , где  $a_1$  и  $a_2$  представляют два различных атома, например,  ${}^{41}K$  и  ${}^{87}Rb$ , а  $b$ –гетероядерную молекулу  ${}^{41}K{}^{87}Rb$ . Что касается промежуточного, возбуждённого молекулярного состояния с энергией  $E_u$ , то его можно ис-

ключить из рассмотрения, используя принцип адиабатического следования. Результаты работы [14] указывают на то, что населённость промежуточного уровня с энергией  $E_u$  исчезающе мала. Это даёт возможность описывать рассматриваемый процесс стимулированной рамановской атомно–молекулярной конверсии как одноступенчатый (единый) процесс. В этом случае можно обобщить гамильтониан взаимодействия  $H_{\text{int}}$  из [2, 3], описывающий единый процесс индуцированной атомно–молекулярной конверсии, и представить его в виде:

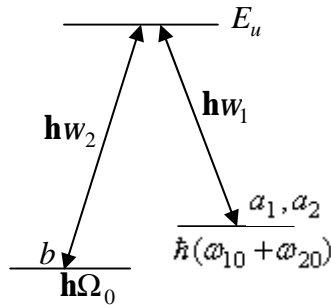


Рис. 1. Энергетическая схема и квантовые переходы в трёхуровневой  $\Lambda$  – схеме.

$$H_{\text{int}} = \mathbf{hg}(\hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ \hat{b} \hat{c}_1^+ \hat{c}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{b}^+ \hat{c}_1 \hat{c}_2^+) \quad (1)$$

где  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$  и  $\hat{b}$  – бозонные операторы уничтожения атомных и молекулярных состояний соответственно,  $\hat{c}_1$  и  $\hat{c}_2$  – операторы уничтожения фотонов, а  $g$  – константа взаимодействия. Используя (1), легко получить систему гайзенберговских уравнений для операторов  $\hat{a}_{1,2}, \hat{b}, \hat{c}_{1,2}$ . Усредняя эту систему уравнений и используя приближение среднего поля (mean field approximation) [1, 2], можно получить систему нелинейных уравнений для амплитуд (параметров порядка) материального  $\langle \hat{a}_{1,2} \rangle = a_{1,2}, \langle \hat{b} \rangle = b$  и электромагнитного  $\langle \hat{c}_{1,2} \rangle = c_{1,2}$  полей

$$\begin{aligned} i\dot{a}_k &= w_{0k} a_k + g a_{3-k}^* b c_k^* c_{3-k}, \\ i\dot{b} &= \Omega_0 b + g a_1 a_2 c_1 c_2^*, \\ i\dot{c}_k &= w_k c_k + g a_k^* a_{3-k}^* b c_{3-k}, (k=1,2) \end{aligned} \quad (2)$$

Вводя в рассмотрение плотности частиц  $n_1, n_2, N, f_1$  и  $f_2$  и соответствующие им фазы

$$a_k = \sqrt{n_k} e^{ij_k}, b = \sqrt{N} e^{iY}, c_k = \sqrt{f_k} e^{iY_k}, (k=1,2) \quad (3)$$

из (2) легко получить четыре независимых интеграла движения для плотностей частиц

$$n_2 + N = n_{20} + N_0, n_1 + N = n_{10} + N_0, f_1 + N = f_{10} + N_0, f_2 - N = f_{20} - N_0 \quad (4)$$

и свести всю систему уравнений (2) к одному нелинейному дифференциальному уравнению для плотности молекул  $N$ :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \pm 2g \{ N(N_0 + n_{10} - N)(N_0 + n_{20} - N)(N_0 + f_{10} - N)(N - N_0 + f_{20}) - \\ &\quad - \left[ \frac{\Delta}{2g}(N - N_0) + \sqrt{N_0 n_{10} n_{20} f_{10} f_{20}} \cos q_0 \right]^2 \}^{1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $N_0, n_{10}, n_{20}, f_{10}, f_{20}$  и  $Y_0, j_{10}, j_{20}, Y_{10}, Y_{20}$  – начальные плотности частиц и соответствующие им начальные фазы,  $q_0 = Y_0 + Y_{20} - Y_{10} - j_{10} - j_{20}$  – начальная разность фаз,

$\Delta = w_{01} + w_{02} - \Omega + w_1 - w_2$  – расстройка резонанса. Общее решение уравнения (5) формально можно представить в квадратурах в виде обобщённого, гиперэллиптического интеграла, который не выражается через известные функции. Поэтому дальнейшее рассмотрение можно провести с использованием численных методов. Из (5) видно, что особенности динамики системы существенно определяются начальными плотностями частиц, начальной разностью фаз и расстройкой резонанса. Изучим далее особенности эволюции системы только для случая точного резонанса, полагая в (5)  $\Delta = 0$ . Тогда легко видеть, что если начальная плотность хотя бы одной из подсистем равна нулю, то эволюция системы не зависит от начальной разности фаз. Кроме того, система не эволюционирует, если одновременно две какие-либо из начальных плотностей частиц равны нулю.

Поскольку интерес представляет процесс производства молекул, то мы будем считать, что в начальный момент времени в системе отсутствуют молекулы ( $N_0 = 0$ ). Тогда временная эволюция плотности молекул  $N(t)$  выражается интегралом

$$\int_0^N \frac{dy}{\sqrt{y(n_{10} - y)(n_{20} - y)(f_{10} - y)(f_{20} + y)}} = 2gt. \quad (6)$$

Из (6) видно, что возможна как периодическая, так и аperiodическая эволюция плотности молекул в зависимости от соотношений между начальными плотностями частиц. В общем случае, когда  $f_{20} \neq 0$  и  $n_{10} \neq n_{20} \neq f_{10}$ , эволюция системы является периодической и период колебаний  $T$  определяется интегралом вида

$$\int_0^{n_m} \frac{dy}{\sqrt{y(n_{10} - y)(n_{20} - y)(f_{10} - y)(f_{20} + y)}} = gT, \quad (7)$$

где  $n_m = \min(n_{10}, n_{20}, f_{10})$  есть наименьшая из плотностей, содержащихся в скобках под знаком функции  $\min$ . При этом амплитуда колебаний плотности молекул  $A$  также равна  $n_m$ .

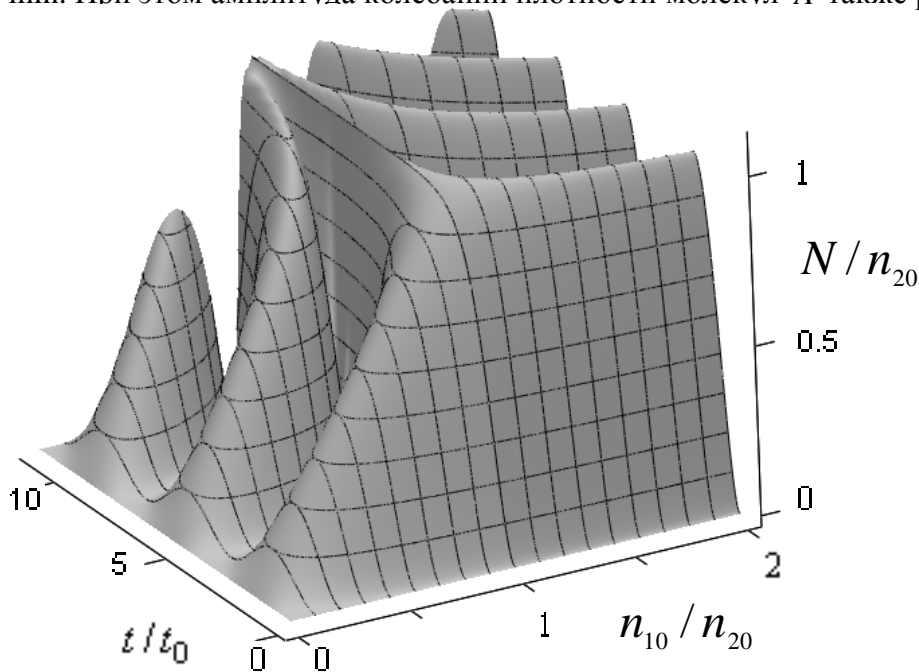


Рис. 2. Временная эволюция нормированной плотности молекул  $N/n_{20}$  в зависимости от значений параметра  $n_{10}/n_{20}$  при  $f_{10}/n_{20} = f_{20}/n_{20} = 50$ ,  $N_0 = 0$ .

Результаты численного интегрирования выражения (6) представлены на рис. 2. Видно, что при  $n_{10} = 0$  плотность молекул также равна нулю, так как в отсутствие атомов одного из двух сортов гетеромолекула образоваться не может. С ростом отношения  $n_{10}/n_{20}$  в пределах от нуля до единицы плотность молекул испытывает осцилляционное поведение с амплитудой  $N = n_{10}$ . Таким образом, при любом изменении соотношения между плотностями  $n_{10}, n_{20}$  и  $f_{10}$  наименьшая из них определяет амплитуду колебаний плотностей молекул  $N(t)$  во времени. На рис. 3 представлена зависимость периода  $T$  колебаний от начальных плотностей системы, полученная численным интегрированием уравнения (7). Из рис. 2 и 3 видно, что с ростом  $n_{10}/n_{20}$  амплитуда и период колебаний монотонно растут. При приближении  $n_{10}/n_{20}$  к единице период колебаний начинает быстро расти и обращается в бесконечность при  $n_{10}/n_{20} = 1$ . Следовательно, с ростом  $n_{10}$  периодический режим эволюции трансформируется в аperiodический при  $n_{10} = n_{20}$ . При этом плотность молекул монотонно растёт с ростом  $n_{10}/n_{20}$  от нуля при  $t/t_0 = 0$  до единицы при  $n_{10}/n_{20} = 1$ . Из рис. 2 видно, что плотность молекул монотонно растёт со временем и асимптотически стремится к величине  $n_{10}$  снизу. Обратный процесс, т.е. диссоциация молекул на атомы, в этом случае не идёт из-за сложного индуцирования процесса атомно-молекулярной конверсии. Если все атомы с начальными плотностями  $n_{10} = n_{20}$  связываются в молекулы, то в отсутствие атомов прекращается процесс индуцирования ими и диссоциация молекул не происходит. Далее с ростом  $n_{10}/n_{20}$  при  $n_{10}/n_{20} > 1$  восстанавливается периодический процесс атомно-молекулярной конверсии, однако амплитуда колебаний плотности молекул теперь равна  $n_{20}$  (т.е. меньшей из плотностей  $n_{10}$  и  $n_{20}$ ) и остаётся постоянной с ростом  $n_{10}$ . Период колебаний при  $n_{10}/n_{20} \geq 1$  сначала быстро убывает с ростом отношения  $n_{10}/n_{20}$ , а затем имеет место медленное монотонное уменьшение периода (рис. 2). Из рис. 2 можно также заметить, что интервал значений параметра  $n_{10}/n_{20}$  в окрестности единицы, соответствующий переходу от колебательного режима в аperiodический и затем снова в колебательный, периодический режим, очень узкий, т.е. период колебаний молекул начинает быстро расти только в небольшой окрестности параметра  $n_{10}/n_{20} = 1$  (рис. 3). Что касается зависимости периода колебаний от плотности фотонов  $f_{20}$ , то с ростом отношения  $f_{20}/n_{20}$  имеет место сначала быстрое (в окрестности значения  $f_{20}/n_{20} \geq 0$ ), а затем замедленное уменьшение периода колебаний. Это означает, что если бы во входном канале присутствовали бы атомы обоих сортов  $n_{10}$  и  $n_{20}$  и фотоны с плотностью  $f_{10}$ , но отсутствовали бы фотоны в входном канале реакции ( $f_{20} = 0$ ), то процесс образования молекул оказывался невозможным, что также обусловлено особенностями стимулирования: при  $N_0 = f_{20} = 0$  стимулирование отсутствует. С ростом  $f_{20}$  восстанавливается периодический режим процесса конверсии.

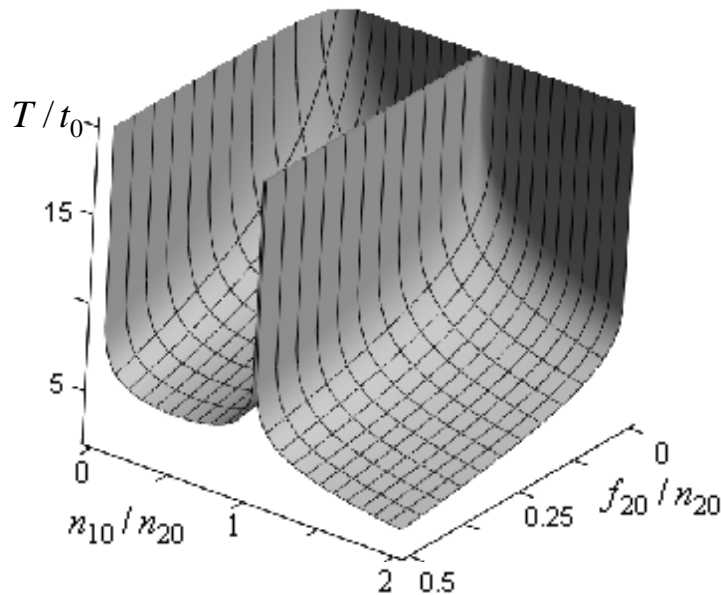


Рис. 3. Зависимость периода колебаний плотности молекул от параметров  $f_{20}/n_{20}$  и  $n_{10}/n_{20}$  при  $f_{10}/n_{20} = 80$ ,  $N_0 = 0$ .

Отметим, что решение уравнения (6) при  $n_{10} = n_{20} = n_0$  имеет вид

$$\Pi(j, k^2(1 + \frac{f_{20}}{n_0}), k) + \frac{n_0}{f_{20}} F(j, k) = gn_0(n_0 + f_{20})\sqrt{f_{10}/f_{20}t},$$

где

$$j = \arcsin \sqrt{(1 + f_{20}/n_{10})/(1 + f_{20}/N)}, \quad k^2 = \frac{f_{10}}{f_{10} + f_{20}},$$

$\Pi(j, n, k)$  и  $F(j, k)$  – неполные эллиптические интегралы третьего и первого рода с модулем  $k$  и параметрами  $j$  и  $n$  соответственно [15, 16]. Отметим, что с ростом  $f_{10}$  и  $f_{20}$  период колебаний молекул монотонно убывает. Поэтому в пределе заданной плотности фотонов обоих импульсов ( $f_{10}, f_{20} \gg n_{10}, n_{20}, N_0 = 0$ ) получаем

$$N = n_m sn^2(g\sqrt{f_{10}f_{20}n_M t}), \quad k^2 = n_m/n_M,$$

$$T = 2K(k)/(g\sqrt{f_{10}f_{20}n_M}), \quad A = n_m$$

при  $n_{10} \neq n_{20}$  и

$$N = n_0 th^2(g\sqrt{f_{10}f_{20}n_0 t})$$

при  $n_{10} = n_{20} \equiv n_0$ , где  $n_m = \min(n_{10}, n_{20})$ ,  $n_M = \max(n_{10}, n_{20})$ , т.е. меньшая и бóльшая из двух начальных плотностей  $n_{10}$  и  $n_{20}$ . Здесь  $sn(x)$  – эллиптический синус, а  $K(k)$  – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем  $k$  [15, 16]. Амплитуда колебаний  $A$  равна меньшей из двух начальных плотностей атомов, а период колебаний определяется бóльшей из них. Период колебаний монотонно убывает с ростом параметра  $|n_{10} - n_{20}|$  и обращается в бесконечность при  $n_{10} = n_{20}$  (рис.3).

### III. Заключение

Таким образом, видно, что имеют место как периодический, так и аperiodический режимы превращения пары различных бозе–атомов в гетероядерную молекулу в зависимости от начальных условий.

В заключение приведём оценку периода колебаний плотности частиц. Сравнивая гамильтониан (1) с гамильтонианом (2) из [17], можно получить соотношение  $g = c / \hbar \sqrt{f_{10} f_{20}}$ , где константа  $c$  из [17] равна  $8 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{3/2} \text{ с}^{-1}$ . Полагая плотности частиц порядка  $10^{14} \text{ см}^{-3}$ , для периода колебаний получаем величину порядка  $10^{-3} - 10^{-4} \text{ с}$ .

### IV. Библиография

1. П.И. Хаджи, Д.В. Ткаченко.// Письма в ЖЭТФ.В.2006. V.83. N 120.
2. P.I. Khadzhi, D.V. Tkachenko.// J.of Nanoelectronics and Optoelectronics. 2009.V.4. N 101.
3. C.A. Regal, G. Ticknor, J.L. Bohn, D.S. Jin.// Nature. 2003. V.424. N 47.
4. K.E. Strecker, G.B. Partridge, R.G. Hulet.// Phys. Rev. Lett. 2003.V. 91. N 080406.
5. J. Herbig, T. Kraemer, M. Mark, T. Weber, C. Chin, H. – C. Nägerl, R. Grimm.// Science. 2003. V.301. N 1510.
6. A. – C. Voigt, M. Taglieber, L. Costa, T. Aoki, W. Wieser, T.W. Hänsch, K. Dieckmann.// Phys. Rev. Lett.2009.V. 102. N 020405.
7. C.A. Stan, M.W. Zwiernlein, C.H. Schunck, S.M.F. Raupach, W. Ketterle.// Phys. Rev. Lett. 2004.V.93. N 143001.
8. K. – A.B. Soderberg, N. Gemelke, C. Chin.// New J. Phys.2009.V. 11.N 055022.
9. C. Haimberger, J. Kleinert, M. Bhattacharya, N.P. Bigelow.// Phys.2004. Rev.V. A70. N 021402(R).
10. J.M. Sage, S. Sainis, T. Bergeman, D. De Mille.// Phys. Rev. Lett. 2005. V.94. N 203001.
11. J.T. Kim, D. Wang, E.E. Eyler, P.L. Gould, W.C. Stwalley.// New J. Phys.2009.V.11. N 055020.
12. C. Chin, T. Kraemer, M. Mark, J. Herbig, P. Waldburger, H. – C. Nägerl, R. Grimm. Phys. Rev. Lett. 94, 123201 (2005).
13. M. Taglieber, A. – C. Voight, T. Aoki, T.W. Hänsch, K. Dieckmann.// Phys. Rev. Lett.2008.V. 100. N 010401.
14. M. Koštrun, M. Mackie, R. Cote, J. Javanainen. //Phys. Rev. 2000.V.A62.N 063616.
15. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик.// Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Наука, Москва (1971).
16. Г. Корн, Т. Корн.// Справочник по математике для научных работников и инженеров. Наука, Москва (1968).
17. D.J. Heinzen, R. Wynar, P.D. Drummond, K.V. Kheruntsyan.// Phys. Rev. Lett. 2000. V.84. N5029.