

## LUCRĂRI DE LABORATOR ASISTATE DE CALCULATOR. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A TEOREMEI LUI STEINER CU AJUTORUL PENDULULUI DE TORSIUNE

Alexandru Rusu, Constantin Pîrţac, Spiridon Rusu  
[fizica.rusu@gmail.com](mailto:fizica.rusu@gmail.com)

**Abstract.** Se propune un soft creat special pentru verificarea teoremei lui Steiner cu ajutorul pendulului de torsiune în cadrul lucrărilor de laborator la Fizică. Drept punct de pornire serveşte teorema despre variaţia energiei cinetice a pendulului la revenirea lui după abatere în poziţia de echilibru. Se propune şi o instalaţie de laborator ce permite utilizarea unui cronometru digital interfaţat calculatorului, care poate furniza intervalele de timp în care obturatorul pendulului întretaie fascicolul unui senzor al cronometrului. Instalaţia şi softul permit determinarea momentului de inerţie a pendulului cu masele simetrice situate la diferite distanţe de la axa de pendulare, verificarea experimentală a teoremei lui Steiner, calculul erorilor standard, construirea graficelor dependenţelor studiate utilizând metoda celor mai mici pătrate, precum şi perfectarea referatului la lucrarea propusă.

**Cuvinte-cheie:** pendul de torsiune, teorema lui Steiner

### I. Introducere

Unul din scopurile lucrărilor de laborator la Fizică este însuşirea legilor fundamentale prin metoda verificării lor pe cale experimentală. Această metodă permite stabilirea limitelor de aplicabilitate a legilor fizice în cazuri concrete de utilizare a aparatelor de măsură. Pentru verificarea legilor este nevoie de procesarea unui număr mare de date experimentale care poate fi realizată cu ajutorul unor aparate de măsură interfaţate calculatorului şi a softurilor speciale [1,2]. În calitate de exemplu vom analiza posibilităţile verificării teoremei lui Steiner cu ajutorul pendulului de torsiune (fig. 1). În acest scop este utilizat un cronometru digital interfaţat calculatorului cu ajutorul căruia este măsurat intervalul de timp, în care obturatorul pendulului întretaie fascicolul senzorului cronometrului la revenirea sa în poziţia de echilibru după răsucirea cu unghiul  $j$ .

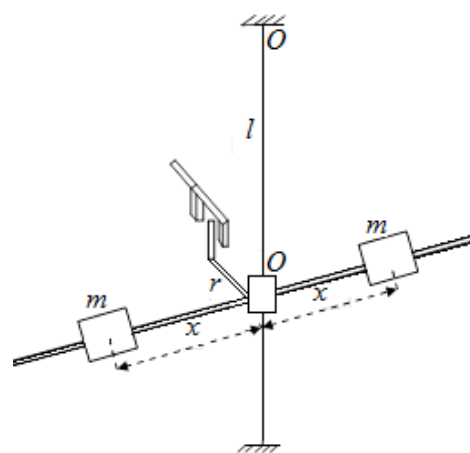


Fig. 1

### II. Consideraţii teoretice şi experimentale

La răsucirea cu un unghi  $j$  a firului elastic OO împreună cu bara suspendată, asupra ei acţionează din partea firului răsucit un moment de rotaţie  $M$ , care conform legii lui Hooke pentru răsucire este

$$M = -kj, \quad (1)$$

unde  $k$  este modulul de răsucire al firului elastic de care este suspendată bara. Formula (1) este valabilă în limitele elasticităţii sârmei utilizate. Se poate demonstra că modulul de răsucire pentru un

fir cilindric de lungimea  $l$  și diametrul  $D$  este

$$k = \frac{pG}{2} \cdot \frac{D^4}{16l}, \quad (2)$$

unde  $G$  este modulul de forfecare al materialului din care este confecționată sârma (*fig. 1*). La eliberarea barei dintr-o poziție ce corespunde unghiului de răsucire  $j$  momentul de rotație (1) va efectua lucrul mecanic:

$$L = \int_j^0 M dj = -k \int_j^0 j dj = \frac{kj^2}{2},$$

care conform teoremei despre variația energiei

cinetice ( $E_{c2} - E_{c1} = L$ ), se consumă pentru creșterea energiei cinetice a pendulului:

$$Iw^2/2 = kj^2/2, \quad (3)$$

unde  $I$  este momentul de inerție al pendulului ce conține de rând cu bara orizontală și o bară pe care este fixat obturatorul pendulului, precum și indicatorul unghiului de răsucire  $j$  (în *fig. 1* nu este arătat),  $w$  este viteza unghiulară a pendulului. Modulul de răsucire  $k$  poate fi calculat după formula (2), măsurând anticipat lungimea  $l$  și diametrul  $D$  al firului. Modulul de forfecare  $G$  al materialului din care este confecționată sârma poate fi luat din tabele, însă poate fi măsurat indirect prin metoda oscilațiilor de torsiune [3].

Viteza unghiulară a barei la momentul când ea trece prin poziția de echilibru (indicatorul pendulului trece prin poziția inițială ce corespunde unghiului  $j = 0$ ) se poate determina din relația  $w = v/r$ , unde  $r$  este distanța de la axa de rotație până la mijlocului obturatorului cilindric, care întretaie fascicolul senzorului (*fig. 1*). Viteza liniară  $v$  a obturatorului poate fi luată aproximativ egală cu viteza medie pe durata  $t_1$  a intersecției de către obturatorul de diametrul  $d$  a fascicolului senzorului:  $v = d/t_1$ . Astfel,

$$w = d/(rt_1). \quad (4)$$

Unghiul de răsucire  $j$  se măsoară de pe scala instalației divizată în grade ( $j_g$ ), dar trebuie exprimat în radiani:

$$j = pj_g/180. \quad (5)$$

Menționăm că verificarea teoremei lui Steiner utilizând relația (3) nu este posibilă dacă nu se cunoaște momentul de inerție  $I_0$  al pendulului fără cilindri. Acest moment de inerție este greu de calculat, întrucât construcția pendulului este complicată.  $I_0$  intervine ca o constantă a instalației de măsurare și poate fi determinat din experiență. Într-adevăr, în acest caz relația (3) capătă aspectul:  $I_0 w^2 = kj^2$ , de unde

$$I_0 = kj^2/w^2 \quad (6)$$

Aici mărimile  $k$ ,  $w$  și  $j$  se calculează după formulele (2), (4) și, respectiv, (5). Efectuând  $N \geq 7$  măsurări ale unghiului de răsucire  $j_g$  și a intervalului de timp  $t_1$  în care obturatorul intersectează fascicolul senzorului la revenirea pendulului în poziția inițială, se poate calcula valoarea medie a momentului de inerție  $\bar{I}_0$  a sistemului.

Odată determinată constanta instalației de măsurare  $I_0$ , se poate purcede la verificarea teoremei lui Steiner. Pentru aceasta se fixează simetric la o oarecare distanță  $x_1$  de la axa de rotație doi cilindri identici de masa  $m$  fiecare (*fig. 1*) și se pot efectua din nou  $N \geq 7$  măsurări ale intervalului de timp  $t_1$  pentru  $N \geq 7$  valori ale unghiului de răsucire  $j_g$ , determinând valoarea medie a momentului de inerție a sistemului cu cei doi cilindri:  $I_1 = kj^2/w^2$ . Calculele mărimii  $I_1$  ca și a mărimii  $I_0$  se efectuează la calculator care utilizează softurile pentru achiziția și procesarea datelor. Se pot

efectua  $n \geq 5$  serii de astfel de măsurări pentru  $n \geq 5$  valori  $x_n$  ale distanței cilindrilor de la axa de rotație, obținând  $n \geq 5$  valori  $I_n$  ale momentului de inerție.

Acest moment de inerție poate fi reprezentat ca suma momentului de inerție  $I_0$  a sistemului fără cei doi cilindri și a momentului de inerție a cilindrilor  $2I_x$  în raport cu axa de rotație a sistemului:  $I = I_0 + 2I_x$ . De aici se obține următoarea expresie pentru momentului de inerție a unui cilindru în raport cu axa de rotație a sistemului:

$$I_x = (I - I_0)/2 \quad (7)$$

Conform teoremei lui Steiner **momentul de inerție a unui corp în raport cu o axă arbitrară de rotație este egal cu suma dintre momentului de inerție  $I_C$  al acestui corp în raport cu axa paralelă ce trece prin centrul de masă  $C$  al corpului și produsul dintre masa lui și pătratul distanței dintre axe.** În cazul experienței noastre

$$I_x = I_C + mx^2. \quad (8)$$

Astfel,

$$(I - I_0)/2 = I_C + mx^2. \quad (9)$$

Relația (9) reprezintă o dependență liniară de forma  $Y = pX + b$ , unde  $Y = I_x = (I - I_0)/2$ ,  $X = x^2$ ,  $p = m$ , iar  $b = I_C$ . Graficul se va construi utilizând cele  $n \geq 5$  valori medii ale momentului de inerție al unui cilindru, obținute cu ajutorul formulei (7) pentru  $n \geq 5$  valori ale distanței  $x$  a cilindrilor de la axa de rotație. Vom putea considera că teorema lui Steiner este confirmată, dacă graficul funcției (9) construit după punctele experimentale va reprezenta un segment de dreaptă cu panta  $p = m$ , unde  $m$  reprezintă masa unuia dintre cei doi cilindri identici (fig. 2). Totodată segmentul tăiat de dreaptă pe axa ordonatelor trebuie să coincidă cu momentului de inerție  $I_C$  a unui cilindru față de axa transversală și care trece prin centrul lui de masă  $C$ :  $b = I_C$ . Se poate demonstra că

$$I_{C\text{teor}} = mh^2/12 + mR^2/4, \quad (10)$$

unde  $m$  este masa cilindrilor, iar  $h$  și  $R$  este înălțimea și, respectiv, raza lui. Valoarea teoretică (10) poate fi comparată cu cea experimentală  $I_C$  obținută din grafic și, astfel, se poate verifica formula teoretică (10). Confirmarea experimentală a formulei (10) va fi posibilă numai dacă valoarea  $b = I_C$  nu se va afla în limitele erorilor întâmplătoare comise în experiment. Aceasta, însă, se poate întâmpla dacă  $m$ ,  $h$  și  $R$  vor avea valori relativ mici.

În fig. 3 este reprezentat graficul funcției (9) obținut la calculator utilizând softul creat pentru această experiență. Masa unui cilindru a fost  $m = 192$  g. După cum se observă, graficul obținut reprezintă un segment de dreaptă după cum o cere teorema lui Steiner. Panta acestei drepte s-a obținut  $p = (200 \pm 2) \cdot 10^{-3}$  kg și se constată că valoarea masei unui cilindru  $m = 192$  g nu intră în intervalul de încredere obținut în experiență.

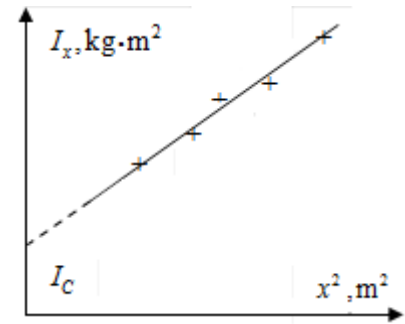


Fig. 2

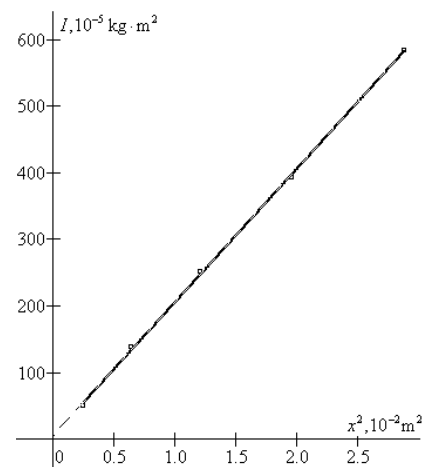


Fig. 3

Trebuie însă de menționat că prelucrarea datelor a fost realizată cu un nivel de încredere de 68,27%. Aceasta înseamnă că există încă probabilitatea de 0,32 ca valoarea adevărată să se afle în afara intervalului de încredere obținut în experiment. Pentru un nivel de încredere de  $P^* = 99,9\%$  eroarea absolută a pantei dreptei va fi  $\Delta p = t(P^*; k) \Delta_s \bar{p} = t(0,999; 4) \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 17,22 \cdot 10^{-3} \approx 17 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ . Acum rezultatul final capătă aspectul  $p = (200 \pm 17) \cdot 10^{-3} \text{ kg}$ . Astfel, cu probabilitatea de 0,999 valoarea masei unui cilindru  $m = 192 \text{ g}$  intră în intervalul de încredere și se poate afirma că teorema lui Steiner este verificată cu o eroare relativă de 8,5 %. Trebuie însă să menționăm și alt aspect, și anume că eroarea standard a termenului liber  $\Delta b = 3,75 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , iar valoarea experimentală a momentului de inerție a unui cilindru  $b = I_C = 4,27 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Aceste mărimi sunt foarte apropiate, adică valoarea căutată a momentului de inerție a unui cilindru se află în limitele erorilor experimentului. Valoarea teoretică calculată cu formula (10) este  $I_{Cteor} = 2,48 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  și se constată că este mai mică decât eroarea standard  $\Delta b$ . Aceasta se întâmplă deoarece în experiment au fost folosiți cilindri de masă și înălțime mică  $h = 0,02 \text{ m}$ . Dacă se utilizează cilindri cu masa de 860 g, înălțimea  $h = 0,14 \text{ m}$  și raza  $R = 0,016 \text{ m}$ , atunci se obține graficul din *fig. 4*, confirmându-se și formula (10) pentru momentul de inerție al unui cilindru față de axa ce trece prin mijlocul cilindrului perpendicular axei lui geometrice.

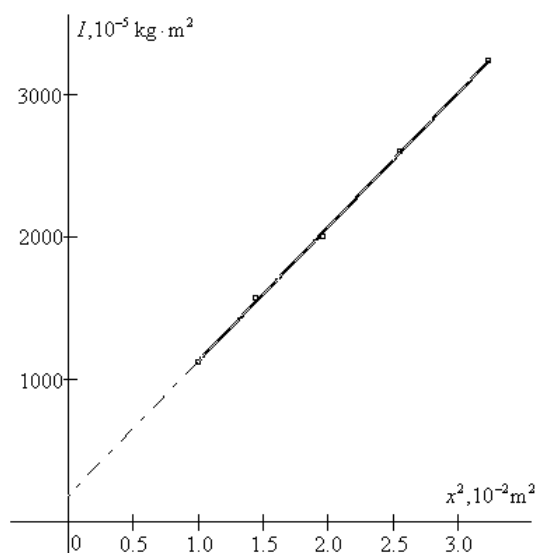


Fig. 4

### III. Concluzii

Utilizarea cronometrului electronic interfațat calculatorului și a softului elaborat pentru verificarea experimentală a teoremei lui Steiner permite aplicarea mai multor elemente de cercetare la efectuarea lucrării, ceea ce creează condiții favorabile pentru însușirea mai profundă și mai eficientă de către studenți atât a materialului teoretic, cât și a metodelor de cercetare utile și la realizarea altor studii experimentale.

### IV. Referințe

1. A. Rusu, C. Pîrțac, S. Rusu. **Trusa de mecanică asistată de calculator. Procesarea datelor.** Fizica și tehnologii moderne. V 6, Nr. 3-4 (23-24), 2008, p. 10-21.
2. A. Rusu, C. Pîrțac. **Lucrări de laborator de Mecanică asistate de calculator.** În materialele celei de a 3-a conferințe internaționale “Telecommunications, Electronics and Informatics”, Volumul II, p. 453-460, Chisinau, Mai, 2010.
3. Alexandru Rusu, Constantin Pîrțac, Spiridon Rusu, Vasile Tronciu. **Lucrări de laborator asistate de calculator. Studiul oscilațiilor de torsiune și determinarea modului de forfecare.** În materialele celei de a 7-a conferințe internaționale “Microelectronics and Computer Science”, p. 402-403, Chisinau, Septembrie, 2011.