EVOLUŢIA UNOR INSTRUMENTE ŞI DISPOZITIVE GEOMETRICE UTILIZATE ÎN MATEMATICĂ, ARHITECTURĂ ŞI CONSTRUCŢII (IV) - CONICE

Lorin Cantemir, prof. univ. dr., membru ASTR, Universitatea Tehnică „Gh. Asachi"Iaşi
Constantin Antonovici, prof. gr. I , Piatra –Neamţ
Ştefan Andrei, prof. gr. I, Buhuşi, jud. Bacău

Abstract: *The ellipse, hyperbola and parabola are familiar to anyone who has studied analytical geometry in high school. They were known and used by Greeks since antiquity, in constructions and theoretical geometry. Nowadays, the conics are used even for modeling the movement of subatomic particles, satellites or galaxies. The purpose of this paper is to bring to your attention the definition and main characteristics of conics, to create exact and approximate figures using the ruler and the compass and to present various tools that can be built with conics. At the end of each chapter you can find computer generated figures and their source code that can be accessible at stefanandrei33ro@yahoo.com.*

1. Scurt istoric

Conicele au fost studiate încă din antichitate de mai mulți matematicieni. Conform legendelor mitologiei grecești, cetățenii atenieni, pentru a scăpa de o molimă care făcea ravagii, l-au consultat în anul 430 î.Hr. pe oracolul din Delos. Li s-a indicat, ca soluție, necesitatea dublării altarului în formă de cub al lui Apollo. Iniţial, problema a fost înțeleasă eronat, crezând că era vorba de dublarea dimensiunilor acestuia. De fapt, această procedură prevedea dublarea volumului cubului iniţial, soluţie ce revenea la construcţia unui segment cu lungimea $\sqrt[3]{2}$. Prima rezolvare provine de la Menaechmus (380 î.Hr.- 320 î.Hr.), matematician grec, profesor al lui Alexandru cel Mare, prin intersectarea unor figuri de tip conică. Apollonius din Perga (262 -200 Î. Hr.), "*marele geometru*", care a trăit la Alexandria, Efes si Pergam a fost şi el preocupat de aceste curbe. Principala lui operă, intitulată Conicele, cuprinde 8 cărţi, dintre care primele 7 s-au păstrat până în zilele noastre, 4 în greceşte, iar celelalte în arabă. Se pare că şi Euclid ar fi scris o lucrare despre secţiunile conice, dar aceasta s-a pierdut. Studiul operelor lui Arhimede ne arată că, pe vremea acestuia, teoria conicelor era deja foarte avansată.

Pe atunci, conicele se numeau *"secţiunea conului cu unghi ascuţit"* (elipsa), *"secţiunea conului cu unghi drept"* (parabola) şi *"secţiunea conului cu unghi obtuz"* (hiperbola). Terminologia actuală a fost introdusă de Apollonius. Într-adevăr, toate conicele erau reduse la studiul secţiunii unui con de revoluţie printr-un plan. În secolele următoare, studiul conicelor s-a datorat, în principal, introducerii unor noi metode matematice, bazate pe coordonate carteziene, dar, şi pe apariția unui nou interes științific în aplicațiile fizice ale proprietăților conicelor. De notat că, în ordinea, Galilei (traiectoria proiectilului) Descartes, Kepler, Pascal, și, în cele din urmă, Newton au folosit studiul conicelor aplicate la descoperiri științifice. Considerăm că pentru fixarea unor elemente utilizate de antici, este indicată enunţarea teoremei lui Apollonius din care se pot deduce cu uşurinţă şi definiţiile conicelor: *Într-un sistem de referință cartezian, dați doi parametri reali $p > 0$ și q, locul geometric al punctelor de coordonate (x, y) care verifică ecuația $y^2 = px + qx^2$ este o conică nedegenerată, după cum urmează: dacă: $q < 0$ este o elipsă, dacă $q = 0$ o parabolă și o hiperbolă dacă $q > 0$* (exemplificare în fiecare paragraf). În continuare, vom trata separat fiecare conică, - cu excepţia cercului care a fost abordat în partea anterioară a lucrării - începând cu elipsa, insistând asupra elementelor esenţiale însoţite de unele comentarii: definiţii echivalente şi formule, locuri geometrice, proprietăţi, construcţii exacte şi aproximative, instrumente pentru trasarea curbelor etc.

Scopul comunicării fiind de a prezenta instrumente şi metode de construcţie a conicelor, am preferat să enunţăm mai multe variante de definire, proprietăţi şi locuri geometrice (fără demonstraţii) ale curbelor, deoarece unele dintre ele ne dau şi metode de construcţie speciale ale lor.

2. HIPERBOLA ŞI PARABOLA

2.1. HIPERBOLA

2.1.1. Elemente introductive

Hiperbola (numită secțiune obtuză a conului) a fost descoperită de Menaechmus în investigațiile făcute cercetând problema dublării cubului. Termenul este considerat a fi fost inventat de Apollonius din Perga (262 - 200 î.Hr.) care în lucrarea sa despre secțiunile conice, a rezolvat o problemă prin metoda antică a ariilor, inclusă în ***Elementele*** lui Euclid (sec. al III . lea Î. Hr.): fiind date segmentele *a* şi *y* şi un număr real *m* să se construiască un segment *x* astfel încât aria pătratului de latură *y* să fie egală cu aria dreptunghiului de laturi *a* şi *x* plus aria pătratului de latură *x*. Problema conduce, în limbaj modern, la ecuaţia $y^2 = ax + x^2$, care reprezintă o hiperbolă (gr. ***hyperbole =exces***).

2.1.2. Definiţii echivalente

Fig. 1.

1. Hiperbola – curbă obţinută prin secţionarea unui con circular cu un plan care taie ambele pânze ale conului (fig. 1). **Notă**: În cazul hiperbolei apar de fapt două curbe deschise (uneori una dintre ele este ignorată). În general sunt ignorate cazurile în care planul trece prin vârful conului, ori unghiul la vârful conului este de 90^0.

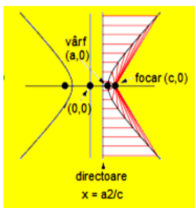


Fig. 2.

2. Hiperbola mai poate fi definită ca locul geometric al punctelor **P** din plan astfel încât raportul distanţelor la un punct fix **F** (focar) și o dreaptă fixă **d** (directoare), $F \notin d$, să fie o constantă **e** (excentricitate) (e >1), fapt arătat de Pappus în secolul al III-lea (fig. 2).

Nota: Hiperbolele au două focare diferite și două directoare asociate, fiecare directoare fiind perpendiculară pe linia care unește cele două focare. În figură este prezentată doar partea din dreapta.

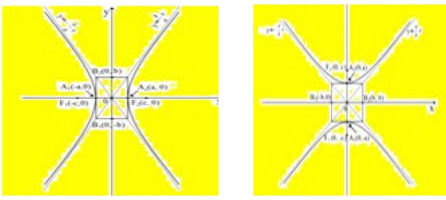
3. Tot ca loc geometric, dar pentru fiecare conică în parte: **Hiperbola** este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferenţa distanţelor la două puncte fixe (*focarele hiperbolei)* este constantă

4. O altă modalitate de a defini conica este dată de [2]: **Hiperbola** este o curbă algebrică de ordinul al doilea, ecuaţiile ei în coordonate carteziene fiind de forma: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, *dacă* $A, B, C,.. \epsilon$ **R**, $B^2 – 4AC > 0;$

5. Ecuaţiile carteziene reduse, raportate la un sistem rectangular de axe, prezentate în manualele şcolare [3]:

a) Dacă focarele se află pe Ox, ecuaţia este: $x^2 / a^2 – y^2 / b^2 = 1$ (fig. 3 a);

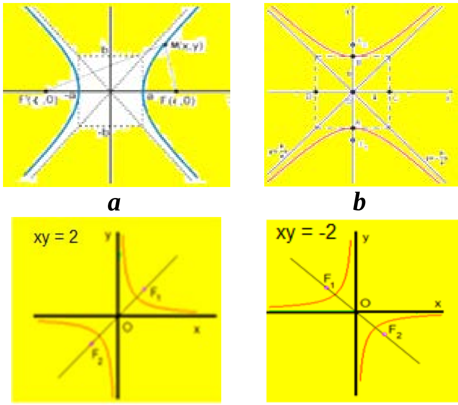
b) Dacă focarele se află pe Oy, ecuaţia este: $y^2 / a^2 – x^2 / b^2 = 1$ (fig. 3 b).



a ***b***

Fig. 3.

Nota: 1. Dacă $a = b$ hiperbola se numeşte echilateră. În acest caz special, asimptotele devin bisectoarele axelor, iar dreptunghiul care uneşte cele patru puncte de pe asimptote se transformă în pătrat; ecuaţiile curbei devenind în cazul 5a: $x^2 – y^2 = a^2$, respectiv $y^2 – x^2 = a^2$ în cazul 5b (fig. 4 a, 4 b).



a ***b*** ***c.*** ***d.***

Fig. 4.

2. Un alt caz particular al hiperbolei echilatere este când asimptotele sunt axele de coordonate. Ecuaţiile devin: $xy = a$.

Dacă $a > 0$, ramurile curbei sunt situate în primul şi al treilea cadran (fig. 4 c), iar dacă $a < 0$, ramurile curbei sunt în al doilea şi al patrulea cadran (fig. 4 d).

6. Ecuaţiile parametrice (polare) pentru 5 a: **(a ch t, b sh t),** t ϵ **R.**

2.1.3. Elementele principale pentru definiţia 5 a (fig. 3 a)

Vârfurile hiperbolei: $A\ (-a, 0), B\ (a, 0);$
axa transversă $AB = 2a$; semiaxa transversă: OA sau $OB = a;$
axa netransversă: $CD = 2b$; semiaxa netransversă: $OC = OD = b;$
focarele hiperbolei: punctele $F_1, F_2\ \epsilon\ AB; F_1(-c,0), F_2\ (c,0),$ unde $c^2 - a^2 = b^2$;
distanţa focală: $d(F_1, F_2) = 2c;$
dreptele directoare: $x = \pm\ a^2 / c;$
excentricitatea hiperbolei: $e = c / a > 1;$
asimptotele: dreptele $y = (b / a)\ x$ *şi* $y = (- b / a)x;$
cercul principal: cercul cu diametrul AB;
cercul director: cercul cu centrul în unul din focare şi raza $2a$.

Axele Ox şi Oy ale reperului xOy sunt axe de simetrie ale hiperbolei, iar originea reperului este centrul de simetrie al hiperbolei.

Notă: Pentru cazul **5 b,** elementele principale se obţin schimbând între ele în **5 a,** pe *x* cu *y*.

Vom enumera în continuare câteva probleme de loc geometric rezolvate cu calculatorul, metode pentru construcţia exactă şi aproximativă a hiperbolei, precum şi unele instrumente utilizate în acest scop.

2.1.4. Locuri geometrice şi proprietăţi

1. Locul geometric al proiecţiilor unui focar pe tangentele la hiperbolă este cercul principal al curbei (podara hiperbolei).

Notă: Reciproca poate constitui o metodă de construcţie a hiperbolei (2.1.5).

2. Locul geometric al simetricului unui focar faţă de o tangentă variabilă la hiperbolă este cercul director cu centrul în celălalt focar.

Notă: Reciproca poate constitui o metodă de construcţie a hiperbolei.

3. Locul geometric al punctelor egal depărtate de un cerc şi de un punct F exterior cercului este o hiperbolă, având ca focare punctul F şi centrul cercului, iar axa transversă egală cu raza cercului.

4. Se dă un punct *A* şi o dreaptă *d*. Prin *A* se duce o secantă variabilă care taie dreapta *d* în *M*, iar în acest punct se ridică perpendiculara *e* pe *d*. Pe e se poartă segmentul *MN* = *MA*. Să se găsească locul geometric descris de *N*.

Răspuns: **hiperbolă** (fig. 5).

Programul "*hiperbola1*" realizează cerinţa.

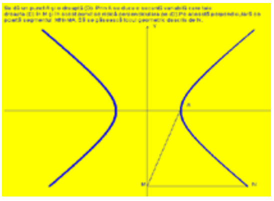


Fig. 5.

Notă: Problema poate fi considerată ca o metodă de construcţie prin puncte a hiperbolei: a) se construiesc axele de coordonate; b) se ia punctul *A* pe *OX*; c) se trasează cu compasul un arc de rază *AM*; d) se duce perpendiculara MN; e) cu aceeaşi deschidere de compas se trasează punctul *N* al hiperbolei; f) se consideră apoi alte puncte care se unesc cu floarul.

5. Se dă cercul de rază r cu centrul în originea axelor. Să se afle locul geometric al punctului *M* care are distanţa până la axa *OX* egală cu jumătatea tangentei duse din *M* la cerc. Răspuns: **hiperbolă** (fig. 6).

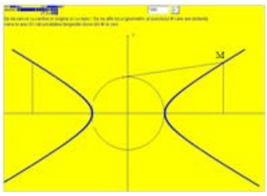


Fig. 6.

Rezolvare cu programul **„hiperbola 2"**

6. O paralelă d la una din asimptotele unei hiperbole întâlneşte hiperbola în punctul *M*. Tangenta în *M* la hiperbolă taie aceeaşi asimptotă în *N*. Se cere locul geometric *L* al intersecţiei dreptei *d* cu paralela prin *N* la a doua asimptotă.

Fig. 7.

Răspuns: **hiperbolă** (fig. 7).

Rezolvare cu programul **"hipebola 3"**

7. Mediatoarea segmentului format de un punct de pe cercul director al hiperbolei cu celălalt focar este tangentă la curbă. În plus, mijloacele acestor segmente sunt pe cercul principal.

Notă: Proprietatea poate constitui o metodă de reprezentare a hiperbolei.

2.1.5. Construcţii exacte ale hiperbolei

1. Construcţia prin puncte, când se cunosc vârfurile şi focarele.

Având în vedere definiția hiperbolei, considerăm perechi de raze, ale căror diferență este 2a. Pentru aceasta:

1) Vom determina o serie de puncte pe axa *Ox*, 1, 2, 3 etc.;

2) Vom lua ca perechi de raze, segmentele *A1-B1, A2-B2, A3-B3*, şi aşa mai departe (fig. 8).

3) Cu vârful compasului în F_1 şi apoi în F_2 trasăm arcele corespunzătoare fiecărei perechi, care determină câte patru puncte ale hiperbolei, în fiecare cadran.

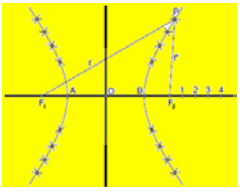


Fig. 8.

4) Unind cu florarul punctele de intersecţie, obţinem hiperbola.

Notă: Cu cât este mai mare numărul de puncte, cu atât mai mare este acuratețea hiperbolei.

2. Construcţia prin puncte când se cunosc vârfurile şi un punct al ei

1) În sistemul de axe *xOy* considerăm vărfurile $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ şi punctul $P(u,v)$, care aparţine parabolei, adică $u^2 / a^2 - v^2 / b^2 = 1$.

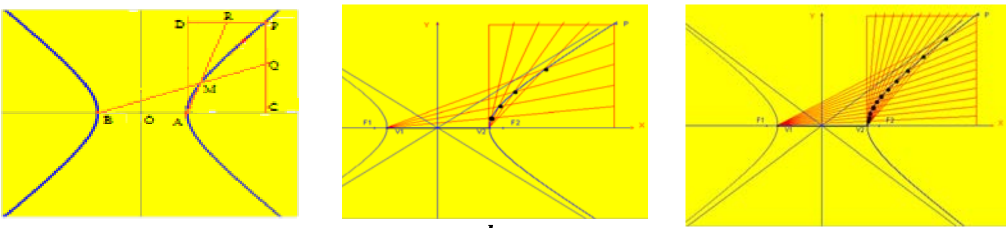
2) Considerăm dreptunghil *PCAD* ($C \in OAx$).

3) Împărţim laturile *CP* şi *DP* în *k* părţi egale prin punctele Q_k, respectiv R_k ($Q_1 = R_1 = P$).

4) Dreptele BQ_k şi AR_k se intersectează în M_k.

5) Dând lui *k* diverse valori, vom obţine puncte ale unei hyperbole.

În figura de mai jos avem reprezentate prin programul "*hiperbola 4*" diferite poziţii ale punctului *M*. Obţinem figura 9 a pentru $k = 2$, 9 b pentru $k = 5$ şi 9 c pentru $k = 12$.



a ***b*** **c**

Fig. 9

Notă: Justificarea construcţiei se află în articolul „*Hipebola*" de pe adresa „c. antonovici@yahoo.com".

3. Construcţia aplicând podara hiperbolei

Această construcție se bazează pe reciproca 1 (2.1.4).

1) Vom considera punctele M_k pe cercul principal**.**

2) Unind focarul *F* cu aceste puncte și construind perpendiculare pe liniile trasate, obținem tangente la o hiperbolă, conica fiind determinată de aceste semidrepte (fig. 10).

Notă: Această metodă ne dă posibilitatea de a construi un hiperbolograf, ceea ce vom arăta în paragraful următor.

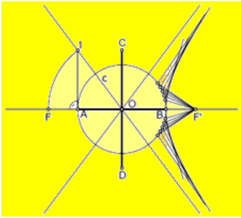


Fig. 10.

4. Trasarea hiperbolei cu tangente înconjurătoare

Conform proprietăţii 7 din paragraful anterior, ilustrată în fig. 11, mediatoarea segmentului F_1M este tangentă la hiperbolă. Considerate mai multe astfel de tangente putem desena curba prin înfăşurare (în fig. 11 am desenat numai două tangente).

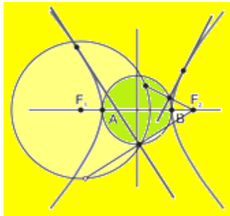


Fig. 11.

2.1.6. Hiperbolografe

1. Construcţia când se cunosc vârfurile şi focarele

Luăm o riglă F_1K (fig. 12) de lungime L pe care o fixăm, prin intermediul unui ac, cu o extremitate în unul din focare, de exemplu în F_1. De celălaltă extremitate, K prindem un fir de lungime $l = L – AB$, al cărui capăt liber îl fixăm în focarul F_2. Cu vârful unui creion ţinem firul întins astfel încât o porţiune KM a sa să fie fie lipită de riglă. Mişcând rigla de capătul K deasupra axei Ox, creionul va descrie partea dreptă superioară a hiperbolei. Continuând mişcarea şi sub axa Ox vom obţine partea dreaptă inferioară a curbei. Cealaltă ramură a conicei se obţine în mod analog, schimbând capătul riglei în F_2.(fig. 12).

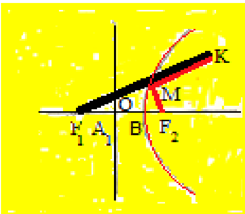


Fig. 12.

Justificare: $MF_1–MF_2 = (L – MK) – (l - MK) = L – I = AB$.

2. Antiparalelogramul

Este un patrulater articulat *ABCD* în care perechile de laturi opuse *AB*, *CD* şi diagonalele *AD*, *BC* sunt respective egale. Presupunând punctele *A* şi *D* fixe, se poate vedea cu uşurinţă că, prin mişcare, punctele *C* şi *B* descriu cercuri cu centrele în *D* şi *A*, iar punctul *P* (intersecţia prelungirilor tijelor *AB* şi *CD*) descrie o hiperbolă (fig. 13).

Justificare: $PA - PD = PA - PB = AB = constant$, deoarece antiparalelogramul are o axă de simetrie din care face parte *P*. De aceea locul descris de *P* este un arc de hiperbolă, cu focarele în *A* şi *D*.

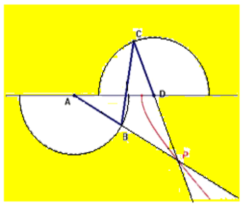


Fig. 13.

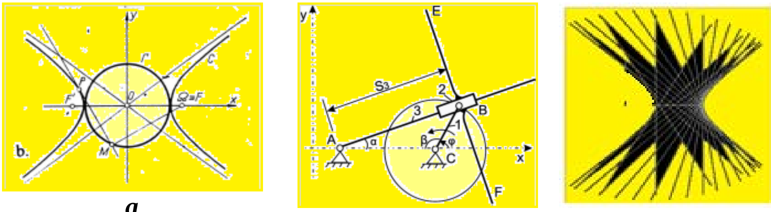
3. Compasul perfect

În secţiunea I a lucrării am prezentat mai multe variante ale compasului perfect. Dacă $\alpha < \beta$ se trasează o hiperbolă (există două locații în care *OP* este în planul paralel cu planul secţiunii).

4. Mecanismul bazat pe reciproca podarei

S-a plecat de la figura 14 a care ilustrează că podara unei hiperbole cu focarele *F* şi *F’* este un cerc. Autorii şi - au pus problema inversă: dacă ştim cercul cu raza *OM*, atunci perpendiculara pe *FM* va fi tangentă la hiperbola, astfel că dacă *M* este mobil pe cerc, să poată obţine hiperbola prin înfăşurare?

S-a luat un cerc cu raza *CB* (fig. 14 b) şi dreapta cu lungime variabilă *AB*, *A* fiind un focar al hiperbolei. Pe *AB* se află culisa 2 de care este sudată dreapta EBF (perpendiculară pe *AB*), adică tangenta la hiperbolă. Un rezultat al studiului este prezentat în figura 14 c.



a ***b*** ***c***

Fig. 14.

2. 2. PARABOLA

2.2.1. Elemente introductive

Parabola a fost studiată de Menaechmus (sec. al IV^{-lea} Î. Hr.) - fost elev al lui Platon şi Eudoxus - care a reuşit să duplice cubul, dar nu prin metodele acceptate pentru construcţiile geometrice (cu rigla şi compasul, lucru necunoscut de el), ci prin intersecţia a două parabole: $x^2 = y$ şi $y^2 = 2x$. Euclid (sec. al III^{-lea} Î. Hr.) a scris şi el despre parabolă, dar numele actual al curbei a fost dat de Apollonius (secolul al III^{-lea} Î. Hr.), care a rezolvat tot prin metoda ariilor problema: fiind date un segment de lungime p şi o arie y^2 să se construiască un segment x, astfel încât dreptunghiul construit pe laturile p şi x să aibă aria y^2, ceea ce conduce la ecuaţia $y^2 = px$ (gr. ***parabole = comparaţie***). Focarul şi directoarea unei parabole au fost considerate de către Pappus (sec. al III^{-lea} D. Hr.). În secolul al XVI^{-lea} Galilei a arătat că proiectilele urmează căi parabolice, iar Pascal a considerat parabola ca o proiecţie a unui cerc. Newton (sec. al XVII^{-lea}) a tratat proprietăţile optice ale parabolei care aduc raze paralele de lumină prin focar, proprietate care are numeroase aplicaţii practice. Pentru a trasa o parabolă sunt necesare elementele: directoare şi focar, directoare şi vârf, vârf şi focar, tangentele la două puncte ale parabolei ş.a.

Vom arăta construcţiile pentru fiecare caz în parte, dar vom considera şi situaţii reciproce: dată curba şi un element al ei, să se afle grafic celelalte elemente.

2.2.2. Definiţii echivalente

1. Parabola (gr. ***parabole*** = comparare) – curbă obţinută prin secţionarea unui con circular cu un plan paralel cu una din generatoare (fig. 15).

Notă: 1. În general sunt ignorate cazurile în care planul trece prin vârful conului sau unghiul la vârful conului este de 90^0.

Fig. 15.

2. Parabola poate fi definită ca locul geometric al punctelor P din plan astfel încât raportul distanţelor la un punct fix F (focar) şi la o dreaptă fixă d (directoare), $F \notin d$, să fie o constantă e (excentricitate) egală cu unitatea (fig. 16).

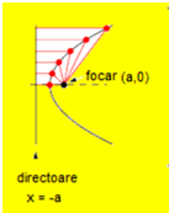


Fig. 16.

3. O altă modalitate de a defini conicele este dată de [2]: **Parabola** este o curbă algebrică de ordinul al doilea, ecuaţiile ei în coordonate carteziene fiind de forma: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, dacă $B^2 - 4AC = 0$, $A, B, C ... \epsilon$ **R**.

4. Ecuaţiile carteziene reduse, prezentate în manualele şcolare, de exemplu [3]: $y^2 = 2px$, $p \epsilon R^*$:

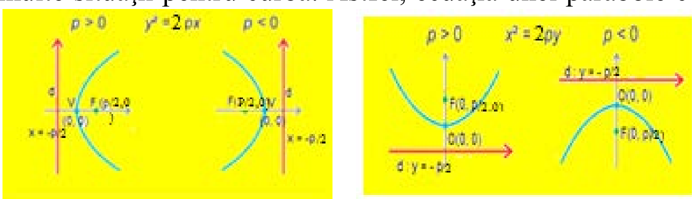
5. Ecuaţiile parametrice (polare): $(a\,t^2, 2\,a\,t)$, $t \epsilon R$.

2.2.3. Elementele principale ale parabolei $y^2 = 2px, p > 0$:

focarul $F(p / 2, 0)$;
distanţa focală: numărul real $p / 2$;
vârful parabolei: $O\,(0, 0)$;
directoarea: dreapta de ecuaţie $x = - p / 2$;
parametrul parabolei: distanţa de la focar la directoare; în acest caz este p;
excentricitatea: $e = 1$;
axa de simetrie: dreapta ce trece prin focar şi este perpendiculară pe directoare; are ecuaţia $y = 0$;
rază focală a punctului *M* care aparţine parabolei, se numeşte segmentul *MF*, precum şi lungimea lui;
latus rectus, notat cu *LR*: un segment limitat de ramurile parabolei, care trece prin focar şi este paralel cu directoarea. Lungimea sa este *4p*.

Notă: Analog se definesc elementele principale şi $p < 0$.

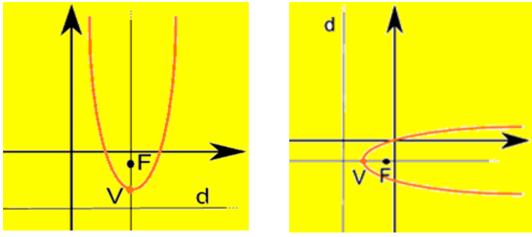
Trebuie menţionat faptul că, în raport cu poziţia axei de simetrie, întâlnim mai multe situaţii pentru curbă. Astfel, ecuaţia unei parabole cu vârful în origine şi cu axa de simetrie *Ox* este $y^2 = 2px$, $p \epsilon R^*$, semnul + sau – indicând orientarea spre dreapta sau spre stânga a ramurilor parabolei (fig. 17 a). Ecuaţia directoarei este $x = - p/2$, iar focarele au abscisele $x = p/2$.



a *b*

Fig. 17

Ecuatia parabolei cu varful în origine, axa de simetrie fiind *Oy* şi ramurile îndreptate în sus sau în jos are forma: $x^2 = 2py$, $p \epsilon R^*$. Ecuaţia directoarei este $y = - p/2$, iar ordonata focarului $y = p/2$, aşa cum este indicat în figura 17 b. Ecuaţia parabolei cu axa de simetrie paralelă cu *Oy* este: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ $(a,b,c \in R)$. Vârful *V*, focarul *F*, directoarea *d* şi parametrul *p* a acestei parabole sunt respectiv: $V(-b/2a, -\Delta/4a)$, $F(-b/2a, (-\Delta + 1)/4a)$, d: $y = -(\Delta + 1)/4a$, $p = 1/2a$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$. Parabola are un minim $m = - \Delta / 4a$, dacă $a > 0$ şi un maxim $M = - \Delta / 4a$ pentru $a < 0$, ambele având loc pentru $x = - b / 2a$ (fig. 18 a).



a *b*

Fig. 18

Analog, parabola cu ecuaţia $x = ay^2 + by + c,\ a \neq 0\ (a, b, c \in R)$ are axa de simetrie paralelă cu axa absciselor şi $V(-\Delta / 4a,\ -b / 2a)$, $F((-\Delta + 1) / 4a,\ -b / 2a)$, $d\!: x = -(\Delta + 1) / 4a$, $p = 1 / 2a$, $\Delta = b^2 - 4ac$ (fig.18 b).

Notă: Deoarece e = 1, toate parabolele sunt asemenea între ele.

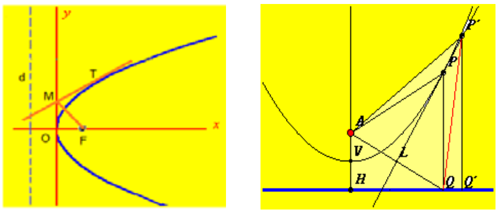
2.2.4. Locuri geometrice şi proprietăţi

1. Locul geometric al proiecţiilor focarului pe tangentele la parabolă este tangenta în vârful parabolei (podara) (fig. 19 a).

Notă: Reciproca proprietăţii sugerează o metodă de construcţie a parabolei (2.2.5).

2. Locul geometric al simetricului focarului faţă de o tangentă variabilă este directoarea parabolei (fig. 19 b).

Notă: Reciproca proprietăţii sugerează o metodă de construcţie a parabolei (2.2.4, 3).



a *b*

Fig. 19.

3. Mediatoarea segmentului determinat de focar şi un punct de pe directoare este tangentă la parabolă (fig. 19 b).

Notă: Reciproca proprietăţii sugerează o metodă de construcţie a parabolei (2.2.4, 3).

2.2.5. Construcţii ale parabolei

Pentru cazul în care se dau **directoarea d şi focarul F** vom prezenta trei metode:

1. Construcţia prin mişcare continuă

1) Se fixează o riglă L astfel încât o muchie a sa să fie pe directoarea **d** dată.

2) Pe această margine a riglei facem să alunece cateta (de exemplu *AB*) a unui echer *ABC*.

3) De vârful *C* este prins capătul unui fir inextensibil de lungime egală cu cateta *CA*, iar celălalt capăt este fixat în focarul *F*.

4) Cu vârful unui creion M, întindem firul în aşa fel să formeze un unghi CMF cu o latură suprapusă peste *CA*.

5) Deplasând echerul de-a lungul riglei, vârful creionului, care menţine tot timpul firul întins, va descrie o parabolă (fig. 20).

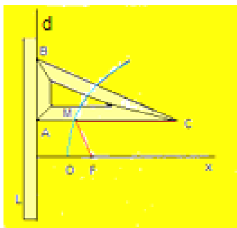


Fig. 20.

Justificarea este imediată, aveam relaţia: $AM = CA - MC = MF$.

2. Construcţia prin puncte

1) Vârful *O* fiind un punct al parabolei se află la jumătatea distanţei dintre focar şi directoarea *d*.

2) Pentru a găsi şi alte puncte ale parabolei se trasează prin *F* şi punctele arbitrare 1, 2,...de pe *AF*, paralele la directoare.

3) Cu vârful compasului în *F* se intersectează aceste paralele cu arce de raze egale respectiv cu distanţa de la paralele la directoare. Astfel, punctul M se găseşte la egală distanţă de focar şi directoare, deci aparţine parabolei (fig. 21).

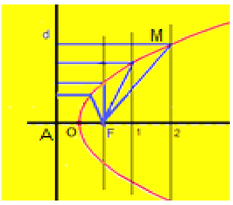


Fig. 21.

Notă: Pentru o construcţie cât mai exactă, punctele *1, 2, 3,* ..... trebuie să fie cât mai apropiate între ele cu cât se află mai aproape de vârful O şi pot fi mai rare pe măsură ce ne depărtăm de *O* de-a lungul axei. După ce am găsit un număr suficient de puncte, cu florarul trasăm o linie curbă care le conţine şi care este parabola căutată.

3. 1) Pe directoarea d se consideră punctele *1, 2, 3,…*arbitrar alese, care se unesc cu focarul *F*.

2) Mediatoarele segmentelor [*1F*], [*2F*], [*3F*] intersectează paralelele anterioare în *I, II, III …*care sunt puncte ale parabolei.

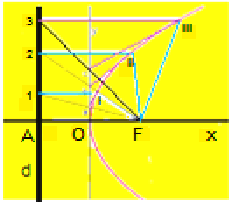


Fig. 22.

3) Unindu-le cu ajutorul florarului obţinem parabola respectivă (fig. 22).

4. Construcţia cunoscându-se axa, vârful *V* şi un punct *M* al parabolei.

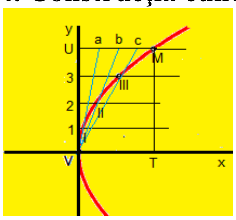


Fig. 23.

1) Se construieşte dreptunghiul *VUMT* (fig. 23) şi se împart în acelaşi număr de părţi egale (de exemplu patru) laturile *VU* şi *UM*.

2) Prin punctele *1, 2, 3, U* de pe *VU* se duc paralele la axa parabolei, iar punctele de diviziune *a, b, c, d* de pe *UM* se unesc cu *V*.

3) Intersecţiile paralelelor cu dreptele *Va*, *Vb*, *Vc* le notăm cu *I, II, III* puncte care aparţin parabolei.

4) Prin unirea lor cu florarul se obţine o jumătate de parabolă.

5) Cealaltă parte se obţine prin simetrie.

5. Construcţia parabolei când sunt date tangentele în două puncte ale ei.

Fie *MP* şi *NP* tangentele în *M* şi *N* la curbă.

1) Împărţim ambele tangente în acelaşi număr de segmente egale (10 în cazul nostru) pe care le numerotăm ca în figura 23.

2) Unim punctele *1* cu *a, 2* cu *b, …9* cu *i* şi observăm că dreptele respective sunt tangente la o parabolă pe care o trasăm cu florarul (fig. 24).

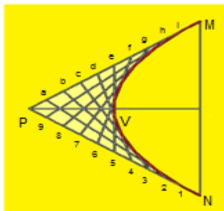


Fig. 24.

6. În manualele şcolare [3] şi [5] se prezintă şi alte metode de construcţie a parabolelor utilizând analiza matematică sau algebra. Vom aborda în continuare şi câteva situaţii reciproce: fiind trasată o parabolă şi precizate unele elemente ale ei, să se găsească grafic celelalte elemente principale.

7. Dată curba c şi focarul F să se traseze directoarea d şi vârful.

Focarul aflându-se pe axa de simetrie, vom trasa această axă astfel:

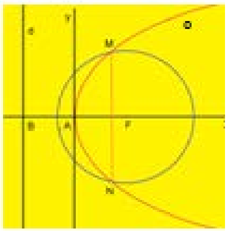


Fig. 25.

1) cu vârful compasului în *F* desenăm un cerc care intersectează curba în *M* şi *N*, puncte simetrice faţă de axa parabolei.
2) Perpendiculara din *F* pe *MN* este axa dorită.
3) Aceasta intersectează curba în *A*.
4) Simetricul *B* a lui *F* faţă de *A* este intersecţia directoarei cu axa, deci directoarea este perpendiculara prin *B* pe *Ax* (fig. 25).

8. Dată curba c şi directoarea *d* să se afle focarul *F*.

1) Trasăm o paralelă la *d* care intersectează parabola în punctelele *M* şi *N*.
2) Mediatoarea segmentului *MN* este axa de simetrie a parabolei care taie curba în *A* iar directoarea în *B*.
3) Simetricul lui *B* faţă de *A* este focarul *F* (fig. 24).

9. Dată curba c şi vârful *O*, se cer focarul *F* şi directoarea *d*.

Vom presupune problema rezolvată pentru a deduce etapele construcţiei. Deci avem parabola, focarul şi directoarea.
1) Considerăm punctual *M* pe curbă, astfel ca $MF \perp d$.
2) Dacă *N* este proiecţia lui *M* pe *d*, atunci *MNDF* este pătrat, deci unghiul *MDF* are 45^0.
3) Paralela *OP* la *DM* (care este prima bisectoare a axelor), intersectează parabola $y^2 = 2px$ în punctual P de coordinate (2p, 2p).
4) Deci $OQ = 3OF$, de unde $OF = OQ / 3$. Rezultă următoarea construcţie: pentru a trasa axa *Ox*, procedăm ca în fig. 21.
5) Trasăm prima bisectoare pe care o intersecăm cu parabola.
6) Proiectăm acest punct pe *Ox*, obţinând punctul *Q* şi împărţim segmental *OQ* în patru prţi egale.
7) Primul punct de la *O* sete focarul *F* şi aplic construcţia anterioară pentru directoare (fig. 26).

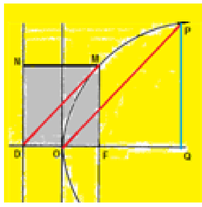


Fig. 26.

2.2.6. Parabolografe

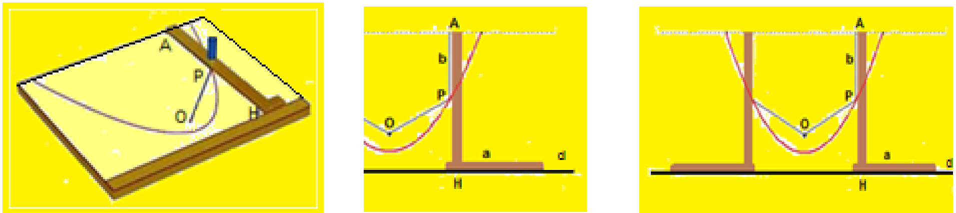
Credem că originea acestor instrumente, care permit trasarea unui arc parabolic este foarte veche. De fapt, aceasta ar fi soluția grafică pentru o problemă dificilă din antichitate: dublarea cubului în urma unei proceduri indicate de Menaechmus (secolul al IV$^{-\text{lea}}$ Î. Hr.). Dar, prima construcţie mecanică (cu ajutorul unui echer şi a unei sfori) a fost realizată în secolul al VI$^{-\text{lea}}$ de arhitectul grec Isidor din Milet. O altă realizare simplă este a matematicianului Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), care concepe parabolograful, împreună cu alte instrumente similare pentru desenat conice în tratatul său despre aceste curbe.

1. Parabolograful prin trasare continuă

Un sistem rigid, format din două tije perpendiculare *a* și *b*, poate să alunece pe o bară *d*. O este un pin fixat pe podea și *A* este un bolț fixat pe *b*. Un fir de lungime $l = AH$ este legat în punctele sale extreme *A* și *O*. Prin glisarea barei *a*, dacă în același timp, cu vârful unui creion în *P* păstrăm firul întins, atuci *P* descrie un arc de parabolă având focarul *O* şi directoarea *d* (fig. 27 a).

Justificare: $PO = AH - AP = PH$.

În practică, acest parabolograf este format din două părți simetrice, cu scopul de a trasa două arce de parabolă care formează un întreg. Se trasează întâi o parte, apoi cealaltă parte pentru a finaliza construcţia(fig. 27 c).



a ***b*** ***c***

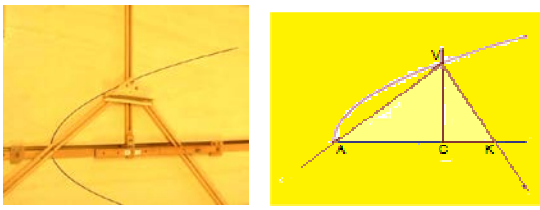
Fig. 27.

Nota: Acest instrument a fost dezvoltat de De l'Hospital în 1720, dar principiul a fost deja definit de matematicianul şi astronomul german Johaness Kepler (1571 – 1630) cu peste o sută de ani mai devreme (în 1604), care consideră parabola ca o elipsă cu unul din focare la infinit.

2. Parabolograful lui Cavalieri

De-a lungul fantei *AK* situată într-un plan se mişcă un segment *CK* (din lemn sau metal) de lungime dată *k*. În punctul *C* este legată rigid o tijă *CV* perpendiculară pe *CK*. Când unghiul drept *KCV* se mişcă, deplasează cu el un alt unghi drept *AVK* (din lemn sau metal), care are laturile *VA* şi *VK* prevăzute cu fante pentru culisarea punctelor *A* şi *K*. În timpul mişcării punctului *C* pe *AK*, vârful variabil *V* descrie o parabolă (fig. 28).

Justificare: *VC* este înălţimea triunghiului dreptunghic *AVK* în raport cu ipotenuza *AK*. Notând *AC* = *x* şi *CV* = *y*, prin aplicarea teoremei înălţimii în acest triunghi, obţinem $y^2 = kx$, proprietate caracteristică parabolei. A fost creat în scopuri demonstrative şi are un scop ştiinţific şi educaţional.



a ***b***

Fig. 28.

Notă: Acest raport sugerează că *y* este medie proporțională între *x* şi *p*.

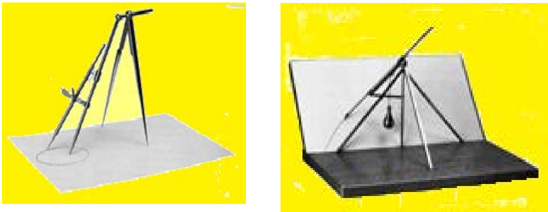
3. Compasul perfect al lui Leonardo da Vinci

Prezentarea generală a acestui instrument s-a făcut la capitolul "*Elipsa*". Aici vom face doar unele precizări: deschiderea conului este de *45* de grade, în scopul de a face mai uşoară setarea unghiului, care nu trebuie să se schimbe în timpul rotației în jurul axei (fig. 29 a).

În alt model de compas, făcut pentru a construi oglinzi parabolice, planul plăcii este înclinat în mod corespunzător, astfel încât să fie paralel cu generatoarea O greutate, vizibilă în figură, împinge mina spre foaie (fig. 29 b).

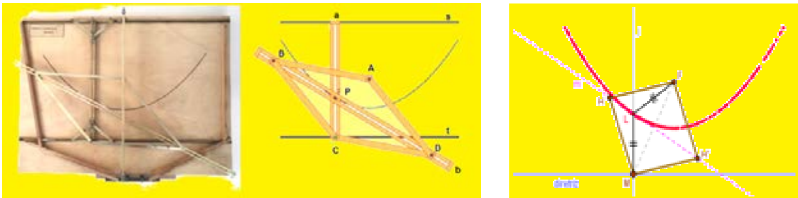
4. Parabolograful cu romb articulat

Punctul *A* este punctul central al parabolei şi este fixat rigid de tabelă, iar punctul *P* trasează parabola. Vârfurile *B* şi *D* ale rombului articulat se mişcă în interiorul ghidajului care le uneşte şi care trece prin punctul *P*. Prin deplasarea lor, punctul *P* descrie o parabolă (fig. 30).



a ***b***

Fig. 29.



a ***b*** ***c***

Fig. 30.

Justificare: Pentru a desena o parabolă cu focarul *F* şi directoarea d, trebuie să arătăm că distanţa *FL* este întotdeauna egală cu distanţa *L* la linia *d*, adică *FL* = *LM* (*M* fiind piciorul perpendicularei din *L*).

În figura 30 *c* avem: *F* (focarul) este punct fix; *M* este punct mobil pe directoare; m este bisectoarea unghiului *MLF* ca diagonală în romb; *j* este linia perpendiculară pe directoare prin *M; L* este punctul de intersecţie al dreptei *j* cu *m*.

5. Dispozitiv bazat pe podara parabolei

Este format dintr-un suport format din două tije perpendiculare *THF* în care punctul *H* se deplasează pe podara parabolei (tangenta la vârf), iar tija perpendiculară în *H* trece prin focarul *F*. Liniile determinate de *TH* învăluie parabola (fig. 31).

Fig. 31.

2.3. ELIPSA

2.3.1. Elemente introductive

A fost descoperită de **Menaechmus** (sec. al IV$^{-\text{lea}}$ Î.Hr.), iar denumirea a fost dată de Apollonius, care a rezolvat o problemă prin metoda antică a ariilor, inclusă în ***Elementele*** lui Euclid (sec. al III$^{-\text{lea}}$ Î. Hr.), fiind date segmentele *a* şi *y* şi un număr real *m* să se construiască un segment *x* astfel încât aria pătratului de latură *y* să fie egală cu aria dreptunghiului de laturi *a* şi *x* mai puţin de *m* ori aria pătratului de latură *x*. Problema conduce în limbaj modern la ecuaţia $y^2 = ax - mx^2$, care reprezintă o elipsă (gr. ***elleipsis* = *lipsă***).

2.3.2. Definiţii echivalente

1. Elipsa – curba obţinută prin secţionarea unui con circular cu un plan care taie toate generatoarele unui pânze.

Notă: 1. Dacă planul este perpendicular pe axa conului, elipsa devine cerc (fig. 32).

2. În general, sunt ignorate cazurile în care planul trece prin vârful conului, ori unghiul de la vârful conului este de 90^0.

Fig. 32.

3. Elipsa mai poate fi definită ca locul geometric al punctelor *P* din plan astfel încât raportul distanţelor la un punct fix *F* (focar) şi o dreaptă fixă *d* (directoare), $F \notin d$, să fie o constantă e (excentricitate), ($0 < e < 1$), fapt arătat de Pappus în secolul al *III-lea* (fig. 33).

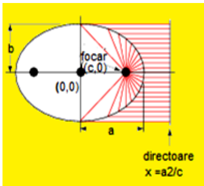


Fig. 33.

Notă: Elipsele au două focare diferite şi două directoare asociate, fiecare directoare fiind perpendiculară pe linia care uneşte cele două focare.

4. Tot ca loc geometric, dar pentru fiecare conică în parte:

Elipsa este locul geometric al punctelor M din plan pentru care suma distanţelor la două puncte fixe (*focare*) este constantă (fig. 34);

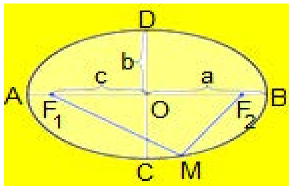


Fig. 34.

5. O altă modalitate de a defini conica este dată de [2]: Elipsa este o curbă algebrică de ordinal al doilea, ecuaţiile ei în coordonate carteziene fiind de forma: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, cu $B^2 – 4\,AC < 0$, $A, B, C, \ldots \epsilon\, R$.

6. Ecuaţiile carteziene reduse, prezentate în manualele şcolare, de exemplu [3]: $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$, unde $b^2 = a^2 – c^2$, $F_1\,(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, $a, b, c\ \epsilon\ R^*$.

7. Ecuaţiile polare: $(a \cos t,\ b \sin t)$, $t\ \epsilon\ [0, 2\pi)$, $a, b\ \epsilon\ R$.

2.3.3. Elementele principale:

vârfurile elipsei: *A (-a, 0), B (a, 0), C (-b, 0), D (b,0);*

axa mare (majoră): *AB = 2a*; semiaxa mare (majoră): *OA* sau *OB = a*.

3. APLICAŢII ALE CONICELOR ÎN NATURĂ ŞI TEHNICĂ

În natură, există concepte care se referă la matematică, confirmând, prin urmare, afirmaţia lui Galileo Galilei, „*Natura este scrisă cu caractere matematice*”. Odată cu dezvoltarea cunoaşterii şi ştiinţei trebuie periodic efectuate unele reconsiderări sau completări şi precizări. Ne vom referi în continuare la câteva exemple pentru a ilustra varietatea fenomenelor naturale sau antropice în care apar conicele. În acest sens, dorim să reamintim câteva etape evolutive privind aplicaţiile acestor curbe în viaţa noastră.

Hiperbola

Pentru a putea preciza starea în care se găseşte un gaz la un moment dat, este nevoie să se cunoască volumul pe care îl ocupă, presiunea pe care o exercită şi temperatura lui. Aceşti trei factori se numesc parametrii de stare. Aceştia nu pot fi independenţi unii de alţii, ci sunt legaţi între ei printr-o relaţie numită ecuaţie de stare. Dacă parametrii de stare a unui gaz de masă dată variază de la o valoare la alta spunem că gazul a suferit o transformare generală. Legătura dintre ei este dată de ecuaţia de stare $p_1V_1/T_1 = p_2V_2/T_2$. Dacă prin anumite procedee se poate menţine constant unul din cei trei pareametri şi masa, lăsând să varieze ceilalţi doi, se obţine o transformare simplă.

De exemplu, menţinând constantă temperatura unui gaz de masă dată şi variind presiunea şi volumul, gazul suferă o transformare izotermă. În acest caz, relaţia stabilită între parametrii de stare este $p_1V_1 = p_2V_2$ numită ecuaţia izotermei, exprimă faptul că produsul dintre presiunea şi volumul unei mase de gaz este constant în tot timpul transformării: $pV = const.$ (legea Boyle şi Mariotte).

Pentru a reprezenta grafic această dependenţă reprezentând presiunea (ca variabilă dependentă, ca *y* din matematică) în funcţie de volum (ca variabilă dependentă, ca *x* din matematică), observam că, din punct de vedere matematic este vorba de un arc de hiperbolă echilateră (fig. 35).

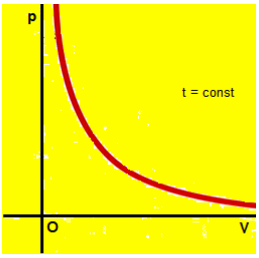


Fig. 35.

Notă: Acest sistem de coordonate este cunoscut sub numele de sistemul de coordonate Clausius Clapeyron.

Hiperbola echilateră este utilă şi pentru autovehiculele motorizate. Orice vehicul echipat cu un motor termic sau electric dispune de o putere limitată care trebuie dezvoltată la obada (periferia) roţilor motoare sub forma unei forţe de tracţiune F_t şi a unei viteze tangenţiale *V*. În acest caz, coordonatele F_t şi *V* reprezintă caracteristicile de tracţiune ale vehiculului. Pentru randament maxim, relaţia $F_t = f(v)$ trebuie să reprezinte ecuaţia unei hiperbole echilatere, însemnând că autovehiculul se va autoregla, adaptându-şi viteza la diversele profile ale traseului, modificându-şi-o automat în funcţie de dificultatea drumului şi folosind o putere constantă dezvoltată de motor, ceea ce înseamnă eficienţă. Vom aprecia că această funcţionare este realizată în special la locomotivele diesel – electrice şi numai a căror putere instalată este de *6000 -8000 C.P.*

Mai precizăm că, în afara vehiculelor de mare putere menţionate, în domeniul subansamblelor mecanice şi a diverselor tipuri de mecanisme, există aşa zisele mecanisme plane articulate cu ghidare a unor puncte pe traiectorii induse. Din marea varietate de mecanisme existente şi utilizate vom menţiona următoarele mecanisme mecanice plane articulate (*MPA*):

- cu dublu piston, cu un cilindru fix şi altul oscilant;
- *MPA* cu culisă-piston.

3.1. Parabola

Ne vom referi la câteva exemple pentru a ilustra varietatea fenomenelor naturale sau antropice în care apare parabola.

1. Balistică

Din experienţă, ştim că un proiectil lansat pe orizontală va descrie o linie curbă, descendentă, determinată de viteza iniţială, greutatea şi frecarea sa cu aerul (care încetinește mișcarea). Dacă s-ar neglija frecarea aerului, parametrii de mișcare rămân viteza și greutatea, care acționează în direcții diferite. Primul care a studiat științific această mişcare a fost Galileo Galilei (1564-1642) care a arătat că teoretic traiectoria proiectilului este o parabolă. Această mişcare poate fi comparată cu căderea apei într-o cascadă, cu un gheizer sau o fântână arteziană, fenomene naturale care fac să se înțeleagă, că mișcarea lor, datorită greutății sale, creează o ramură de parabolă (fig. 36 a,b).

a ***b***

Fig. 36.

2. Iluminat

Parabola are o proprietate de reflexie foarte importantă pentru aplicatii multiple. Știm că, în conformitate cu legile opticii geometrice, fiecare fascicul cu originea în focar se va reflecta spre exteriorul parabolei, paralel cu axa sa (fig. 37 a). Această proprietate este foarte utilizată în construcția de spoturi (fig. 37 b), faruri de masini (fig. 37 c), antene, radar, faruri maritime (fig. 37 d) etc.

a ***b*** ***c*** ***d***

Fig. 37.

3. Radiolocaţie

Conform proprietăţii de reflexive amintită anterior, fiecare rază din afara parabolei și paralelă cu axa se va reflecta în focarul acesteia. Această proprietate este exploatată în construcția antenei de satelit, numită **parabolică**. Semnalele de la un satelit geostaționar și, prin urmare, paralele cu axa de simetrie a antenei, sunt concentrate într-un receptor plasat în focarul parabolei și trimise către televizor (fig. 38 a).

Pe același principiu de lucru se bazează radarul la sol, utilizat de exemplu pentru controlul traficului aerian. Transmițătorul, care are, de asemenea, funcția de receptor și este poziționat în focar, emite un fascicul de radiații electromagnetice care sunt reflectate de antena si trimis paralel cu axa sa spre cer. Atunci când acestea se confruntă cu un obiect, se reflectă în toate direcțiile și, prin urmare și spre radar. Parabola le reflectă în focar, unde este receptorul care le trimite la un computer pentru a le transforma în imagine pe un ecran (fig. 38 b). Pe acest principiu se bazează şi construcţia radiotelescoapelor. Undele radio de provenienţă cosmică au fost descoperite în 1931 de inginerul în radiocomunicaţii Karl Jansky. Primul radiotelescop astronomic a fost construit în 1937 de inginerul Grote Keber. Sursele radio cosmic sunt mai ales nori gazoşi

a ***b***

Fig. 38.

fierbinţi, rămăşiţe de supernove, stele neutronice şi pulsatorii. Stelele luminoase, neperceptibile visual, în majoritatea cazurilor, sunt surse slabe de semnale radio. Spre deosebire de telescoapele optice cele radio pot funcţiona şi ziua, putând penetra straturile groase de gaze şi nori.

Mai multe radiotescoape pot fi interconectate, putând funcţiona ca o singură antenă mare radio. Telescopul de la Parkes (Australia) are un diametru de 64 m. şi a servit la aselenizarea misiunii Apolo 11. Din 1969, fotografiile lui Buzz Aldrin, realizate de Neil Armstrong, au fost recepţionate de Parkes şi retransmise la centrul de zboruri spaţiale de la Huston.

4. Concentratorul solar

Energia solară iradiată pe întreaga suprafaţă a oglinzii parabolice este concentrată pe absorberul concentratorului, fiind convertită de stratul absorbant al acestuia în energie termică. Energia de pe suprafaţa absorberului este transferată, datorită conductei, prin peretele acestuia, spre agentul termic (glycol) care o absoarbe prin convexie. Acesta este un transportator de energie şi ulterior folosit pentru încălzirea apei menajere, încălzirea locuinţei, producerea aerului condiţionat sau în procese industriale (fig. 39).

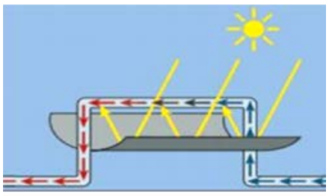


Fig. 39.

5. Arhitectură

1. A. Casa Batlló (Spania)

a ***b***

Fig. 40.

Antoni Gaudi, arhitect catalan din secolul al XIX-lea, faimos atât pentru stilul său unic cât şi pentru proiectele sale puternic individualizate. a folosit mult curbele parabolice (ca şi cele hiperbolice) în construcţiile sale. Inspirat fiind de formele întâlnite în natură, ca de exemplu lanţul, care atârnat între două puncte fixe este o parabolă, a creat extraordinarele arce parabolice întânite la Casa Batlló, capodoperă a sa din Barcelona. A înlocuit coloanele care ar trebui să susţină arcele, iar acestea dispărând au rămas doar arcele, de la pardoseală până la tavan şi înapoi la pardoseală (fig. 40 a, b).

2. Biserica Saint Louis Abbey (SUA)

Fațada circulară a bisericii este formată din trei niveluri de arcade parabolic albe, subțiri, turnate din beton, cel de sus formând un turn-clopotniţă. Arcadele par să plutească de la baza lor de ierburi. În exterior (fig. 41 a), acestea se confruntă cu întunericul datorat izolaţiei din fibră de sticlă pentru ferestre, dar privit din interior

a ***b***

Fig. 41.

(fig. 41 b), ansamblul creează o transluciditate meditativă. Biserica conține, de Asemenea, o sculptură din secolul al XIV$^{-\text{ lea}}$ a Madonnei cu copilul Hristos și artă sacră modernă de artiști din Statele Unite ale Americii, Marea Britanie, Spania, și Franța.

C. Hangarul pentru avioane - Braşov

În etapa de înfiinţare a Îndustriei de avioane în România, la Întreprinderea Aeronautică Română (I. A. R.) în 1925 la Braşov s-a construit un hangar pentru avioane având o secţiune parabolică cu o deschidere de 60 m (fig. 42).

Fig. 42.

6. Cablurile podurilor suspendate

A. Podul Tsing Ma (China) are lungimea de *1600* de metri si o lăţime de 64 de metri, care include *12* benzi de circulatie, câte şase în fiecare direcţie. Mijlocul construcţiei va fi străbătut de două linii de metrou, iar fiecare arc, dintre cele două destinate să susţină imensa greutate a podului, măsoară *205* metri înălţime la o lungime de *667* de metri. Lungimea arcului de sustinere în formă de parabolă depăşeşte pe cea a deja celebrului Lupu Bridge din Shanghai, China, cel care, cu 550 de metri lungime, era deţinătorul recordului mondial (fig. 43).

Fig. 43.

B. **Podul din Hong Kong**, botezat după numele celor două insule pe care le uneşte – Tsing Yi şi Ma Wan, este al 6$^{-\text{lea}}$ ca lungime din lume, asigurând un mai mare volum de comunicaţii feroviare decât orice alt pod de acest fel. Construcţia lui a costat *900* de milioane de dolari, iar lucrările au durat *5* ani. Acum podul este una dintre cele mai importante atracţii turistice ale zilelor noastre. Deosebit de frumos este aspectul acestuia pe timp de noapte (fig. 44).

Fig. 44.

Notă: Evident că în lume sunt foarte multe poduri suspendate celebre, susţinute de cabluri sub formă de arce de parabolă, dar le-am preferat pe acesta din dorinţa de a evidenţia rezistenţa de care este capabilă o astfel de structură parabolică.

7. Balustradele sub formă de parabolă la poduri

Fig. 45.

Podul din Sydney. Cu ocazia împlinirii celei de a *75*$^{-a}$ aniversari, acest pod poate fi considerat unul dintre simbolurile celui mai mare oraş australian. Din cauza amplasării sale, podul este deseori fotografiat alături de Opera din Sydney, aflată în apropiere. Curios că, deşi costurile construcţiei podului au fost relativ mici – *12* milioane de dolari (fig. 45).

8. Susţinere sub formă de parabolă

Cunoscut şi ca Ponte Dona Maria, este un pod de cale ferată construit de Gustave Eiffel în *1877*. Atunci, deschiderea arcului de *160 m* îi aducea titlul de cel mai lung pod arcuit din lume. Lungimea totală este de *353*

Fig. 46.

metri iar platforma de cale ferată se ridică deasupra râului Douro la o înălţime de *60* m (fig. 46).

9.Cupole

Catedrala Naşterea Domnului din Chişinău. Arhitectura este în stil neoclasic târziu, iar cupola, surmontată de un tambur cilindric, este susţinută de patru piloni pătraţi în secţiune, care preiau greutatea prin intermediul a patru arce dublouri şi a patru pendantivi. Învelitoarea cupolei parabolice, cu coastele radiare, este din tablă de fier. Prin tamburul de 13 m lărgime, cu 12 ferestre, interiorul este inundat de lumină (fig. 47).

Fig. 47.

Bibliografie

1. ****DEX '98 (1998)*
2. ****Dicţionar de Matematici Generale, Editura Enciclopedică Română, 1974.*
3. ***Năstăsescu C.& Co.*** *Matematica, manual pentru clsa a XI-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, R. A., 2001.
4. ***Simionescu Gh. D***. *Geometrie Analitică, manual pentru clasa a XI*[a] *liceu – secţia reală şi anii III şi IV licee de specialitate*. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.
5. ***Matei A. ş.a.*** *Desen Tehnic Industrial.* Institutul Politehnic Iaşi, 1963.
6. ***Popescu Iu., Luca L.*** *Sinteza şi analiza unui nou mecanism hiperbolograf.* Articol publicat pe internet.
7. ***Popescu Iu., Luca L.*** *Sinteza şi analiza unui nou mecanism elipsograf.* Articol publicat pe internet.
8. ***Cantemir L., Antonovici C., Andrei Şt.*** *Evoluţia unor instrumente şi dispositive geometrice utilizate în matematică, arhitectură şi construcţii.*
9. ****Manualul Inginerului Mecanic (Mecanisme, Organe de maşini, Dinamica Maşinilor),* Editura tehnică, Bucureşti, 1976.