

FILTRELE NUMERICE ȘI ZGOMOTUL ELECTRONIC PROPRIU (PARTEA II)

V. Guțu, dr ing. conf.univ.
Universitatea Tehnică a Moldovei

3. SCHEMA BLOC ȘI ECUAȚIILE DE BAZĂ ALE FILTRELOR NUMERICE (continuare din Partea I)

Revenind la schema din figura 5, a filtrul numeric prelucrează semnalul $x_3(nT)$ în baza algoritmului P :

$$y(nT) = P [x(nT)], \quad (20)$$

fiind P un operator matematic care descrie filtrul numeric ce transformă mărimea de intrare $x(nT)$ în mărimea de ieșire $y(nT)$. Astfel, după conversia numeric-analogică (CNA) și filtrarea de netezire, se obține semnalul analogic $y_3(t)$. Algoritmul P descrie filtrul numeric și este o ecuație cu diferențe finite. În paragraful 1 al acestei lucrări (Partea I) a fost prezentată ecuația de ordinul 1, relația (9). Dar în general, un filtru numeric poate fi descris printr-o ecuație cu diferențe finite de ordinul m :

$$y(nT) = \sum_{i=0}^r L_i x(nT - iT) - \sum_{r=1}^m K_i y(nT - iT), \quad (21)$$

fiind K_i și L_i constante reale. Acest algoritm constă din trei operații aritmetice: adunare (figura 6, a), înmulțire cu constantă (L_i , K_i , figura 6, b) și întârzierea cu timpul T (figura 6, c). Relațiile dintre mărimile de intrare și ieșire sunt reprezentate în aceeași figură, corespunzător. Conform algoritmului (21) filtrul numeric trebuie să mai cuprindă și mem-

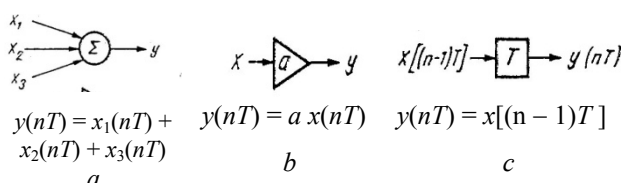


Figura 5. Simbolurile grafice ale elementelor algebrei logice.

orii constantele L_i și K_i . În majoritatea cazurilor acest algoritm se reduce la doi algoritmi particulari ce corespund ecuațiilor cu diferențe finite, de ordinul 1 și 2:

$$y(nT) = K y(nT - T) + x(nT) + Lx(nT - T); \quad (22)$$

$$y(nT) = K_1 y(nT - T) + K_2 y(nT - 2T) + x(nT) + L_1 x(nT - T) + L_2 x(nT - 2T). \quad (23)$$

Ecuțiile (22) și (23) corespund filtrelor numerice recursive de ordinul 1 și de ordinul 2, respectiv. Prin definiție [9], în filtrele numerice recursive mărimea curentă de ieșire este determinată de valorile ei anterioare și de valorile curente și anterioare ale mărimii de intrare; această dependență este exprimată prin relația (21), filtrele recursive fiind denumite și *filtre cu memorie infinită*. Puțin probabil că memoria este chiar infinită, dar că aceste filtre necesită unități suplimentare de memorie este un fapt. Prin urmare, se poate vorbi despre o **redondanță** vădită de circuite logice de tip CBBS și, deci despre un nivel înalt de zgomot propriu al acestora. În filtrele *nerecursive* mărimea de ieșire este determinată explicit în funcție de valorile prezente și anterioare ale mărimii de intrare, *id est*

$$y(nT) = \sum_{i=0}^r L_i x(nT - iT). \quad (24)$$

Din cauza structurii lor, aceste filtre se numesc *transversale*, cu *memorie finită*. Dar și în acest caz, excesul de circuite logice este pe față și un nivel înalt de zgomot propriu nu poate fi ocolit. Cele spuse pot fi argumentate, comparând diverse scheme de realizare a funcției de transfer de ordinul 1 și 2 cu mijloace analogice și numerice, reprezentate în figurile ce urmează (figurile 6 și 7, respectiv 8 și 9).

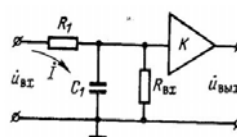


Figura 6. Filtru analog trece-jos de ordinul 1.

Funcția de transfer la forma complexă (analogic)

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

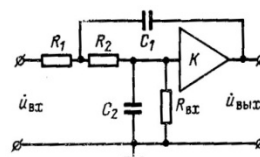


Figura 8. Filtru analogic de ordinul 2 FTJ (schema Sall.-Key).

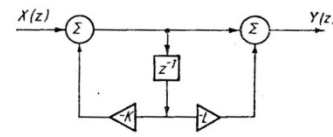


Figura 7. Filtru numeric trece-jos de ordinul 1.

Funcția de transfer la forma transformata Z standard:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - Lz^{-1}}{1 - Kz^{-1}}$$

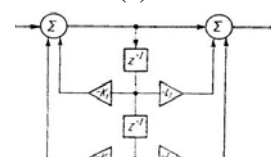


Figura 9. Filtru recursiv de ordinul 2 FTJ (schema canonică).

$|F(j\Omega)|$ pe diferite valori ale mărimii n . Din aceste caracteristici este clar că aproximarea Butterworth,

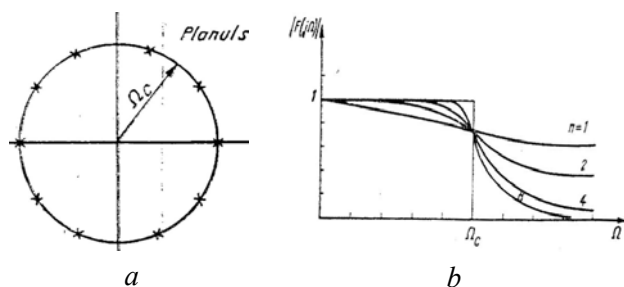


Figura 12. Distribuția polilor (a) și caracteristica de transfer în frecvență a unui filtru Butterworth (b).

fiind cea mai simplă în realizarea practică, nu este suficient de exactă în realizarea frecvenței de tăiere.

Caracteristica de transfer în frecvență a *filtrului Chebyshev* se poate scrie în felul următor:

$$|F(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}, \quad (27)$$

unde $V_n(x)$ prezintă un polinom Chebyshev de ordinul n ; acesta poate fi generat (printr-o formulă de recurență) astfel:

$$V_{n+1}(x) - 2x V_n(x) = 0, \quad (28)$$

și cu $V_1(x) = x$; $V_2(x) = 2x^2 - 1$.

Acest polinom este caracterizat prin ondulații pentru x , variind într-un anumit domeniu. Specificând mărimea ε , se poate obține caracteristica de frecvență cu ondulații egale în banda de trecere și cu o cădere monotonă (fără ondulații) în banda de atenuare (figura 13, a).

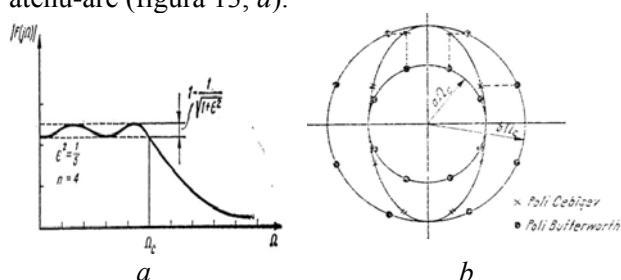


Figura 13. Caracteristica în frecvență (a) și distribuția polilor unui filtru Chebyshev (b).

Se poate calcula amplitudinea ondulației δ , în felul următor:

$$\delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}. \quad (29)$$

Polii funcției de transfer Chebyshev (27) sunt distribuiți pe o elipsă (figura 13, b) determinată de Ω_c , ε și n . Elipsa are axele orizontală $a \cdot \Omega_c$ și verticală $b \cdot \Omega_c$,

fiind a și b determinate:

$$a, b = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{\varepsilon^{-2} + 1} + \varepsilon^{-1} \right)^{1/n} \pm \left(\sqrt{\varepsilon^{-2} + 1} + \varepsilon^{-1} \right)^{-1/n} \right]. \quad (30)$$

În relația (30) a corespunde semnului $-$ iar b semnului $+$. Polii de pe elipsă sunt legați geometric de polii a două circumferințe Butterworth, cu razele $a \cdot \Omega_c$ și $b \cdot \Omega_c$: ordonata unui pol de pe elipsă este egală cu ordonata polului de pe circumferința mare, fiind abscisa egală cu abscisa polului de pe circumferința mică.

Utilizarea caracteristicilor de transfer în baza *funcțiilor Jakoby* și realizarea *filtrelor eliptice* are loc în cazuri practice mai rar întâlnite, speciale. Aceasta se datorează faptului că, asigurând o pantă a caracteristicii de transfer în frecvență mai abruptă, apar ondulații atât în banda de trecere cât și în banda de oprire. Din punctul de vedere al zgomotului electronic propriu aceste filtre sunt asemănătoare filtrelor Chebyshev.

4.2. Proiectarea filtrelor numerice. Generalități

Cronologic filtrele numerice au apărut mult în urma filtrelor analogice, când deja exista o bogată experiență în aplicarea practică a metodelor de sinteză a acestor filtre. Era firească tendința de aplicarea a acestor cunoștințe în sinteza filtrelor numerice.

În proiectarea filtrelor analogice se pot distinge două faze: prima – aproximarea caracteristicii și a doua – sinteza filtrului. Așa, în cazul unui filtru trece-jos în prima fază se cere realizarea unei caracteristici de frecvență ideale, *id est* dreptunghiulare. O astfel de caracteristică se aproximează satisfăcător și rezultă în poziția zerourilor și a polilor în planul complex. În a doua fază, a sintezei are loc deducerea funcției de transfer care poate fi realizată cu componente reale.

Merită de subliniat că, deși metodele de aproximare și sinteză a filtrelor numerice nu se deosebesc conceptual, în proiectarea celor două tipuri de filtre apar, totuși anumite diferențe din cauza unor condiții ce se impun filtrelor numerice.

În practica proiectării filtrelor analogice și numerice este utilizată pe larg metoda de **proiectare în domeniul de frecvență**. Astfel, dacă este cunoscută frecvența de eșantionare, se poate deduce caracteristica de frecvență a filtrului numeric, care să aproximeze caracteristica filtrului analogic. Metoda este una de *proiectare indirectă*, deoarece pleacă de la caracteristica unui filtru analogic. Dar filtrele numerice pot fi proiectate și prin *metode directe*, fără utilizarea procedurilor de proiectare a filtrelor analogice. În literatura de profil sunt date pe larg metodele indirecte și directe de

proiectare a filtrelor trece-jos, pentru celelalte tipuri de filtre relațiile de proiectare se obțin prin transformări de spectru ale acestora.

Proiectarea filtrelor începe cu stabilirea unui set de parametri caracteristici [9]. Pentru filtrul trece-jos acești parametri sunt figurați pe caracteristica amplitudine-frecvență *normată* sub forma de toleranțe, așa cum se prezintă în figura 14. Amplitudinea benzii de trecere este 1 iar toleranța $\pm \delta_1$; astfel,

$$1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_1, \quad |\omega| \leq \omega_p.$$

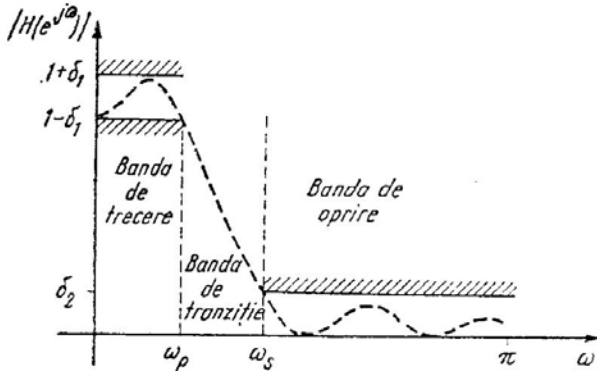


Figura 14. Aproximarea unui filtru trece-jos cu limitele de toleranță corespunzătoare.

În ce privește banda de oprire, aceasta se caracterizează printr-o amplitudine cvasi zero, cu o toleranță mai mică sau egală cu δ_2 , adică

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2, \quad \text{pentru } \omega_s \leq |\omega| < \pi.$$

În relațiile de mai sus, frecvențele de tăiere în banda de trecere ω_p și în banda de atenuare ω_s se dau în forma unghiulară, în planul z . Domeniul dintre frecvențele de tăiere reprezintă banda tranzitorie.

Pasul următor în proiectarea filtrului numeric este determinarea caracteristicii de frecvență, care s-ar încadra în interiorul toleranțelor admise. Mai departe, proiectarea filtrului constă în aproximarea caracteristicii de frecvență.

Proiectarea filtrelor numerice, metodele matematice utilizate depind esențial de tipul răspunsului la impuls: este filtrul de tip IIR (*infinit impuls repost*) sau FIR (*finit impuls repost*).

Dacă filtrul este de tip IIR, caracteristica de frecvență se aproximează printr-o funcție rațională în timp; dacă este de tip FIR – aproximarea caracteristicii va fi de tip polinomial.

În literatura de specialitate aceste căi de proiectare se descriu aparte [9] și în cadrul actualei lucrări nu se prezintă în detalii, ci doar în linii generale, de informare: scopul lucrării este altul! Vom lua în considerare unele elemente-cheie în procesul de proiectare care, explicit sau implicit, dar determină nivelul final de zgomot propriu al filtrelor numerice.

4.3. Proiectarea filtrelor numerice pe baza caracteristicilor filtrelor analogice

Constă în deducerea funcției de transfer a filtrului numeric (IIR), prin aplicarea unor transformări algebrice acestei funcții, cu păstrarea performanțelor apriori stabilite.

Caracteristica de bază a unui filtru analogic este funcția de transfer (FT) $H_a(s)$ sau răspunsul la impulsul unitate, $h_a(t)$; funcția de transfer se poate scrie

$$H_a(s) = \frac{\sum_{i=0}^r M_i s^i}{\sum_{i=0}^m N_i s^i} = \frac{Y_a(s)}{X_a(s)}, \quad (31)$$

unde $Y_a(s)$ și $X_a(s)$ sunt transformatele Laplace ale mărimilor de ieșire $y_a(t)$ și intrare $x_a(t)$. Aceste mărimi, de intrare și ieșire sunt legate prin integrala de convoluție, *id est*

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h_a(t - \tau) d\tau, \quad (32)$$

fiind $H_a(s)$ și $h_a(t)$ legate prin relația

$$H_a(s) = \mathcal{L}[h_a(t)]. \quad (33)$$

Ecuatii similare se pot scrie pentru filtrele numerice

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^r L_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^m K_i z^{-i}} = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (34)$$

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{\infty} x(mT) h(nT - mT), \quad (35)$$

expresia (34) corespunzând funcției de transfer iar (35) – sumei convoluțiilor.

Filtrul numeric se poate obține prin deducerea $H(z)$ sau $y(nT)$, având ca punct de plecare proiectarea filtrului analogic. Condiția generală ale acestor transformări – ca proprietățile de bază ale răspunsului în frecvență al filtrului analogic să se mențină în răspunsul în frecvență al filtrului numeric. Ceea ce înseamnă că axa imaginară din planul s să se transforme în cercul unitar în planul z , filtrul numeric obținut fiind stabil dacă este stabil filtrul analogic de la care s-a plecat.

Metoda invarianței în impuls și transformarea z biliniară – acestea sunt procedeele principale în proiectarea filtrelor numerice, pornind de la caracteristicile filtrelor analogice. Metodele pot fi studiate mai detaliat în [9], la fel ca și **metoda directă** de proiectare a filtrelor numerice FIR și cea asistată de calculator.

5. CONSIDERENTE FINALE ÎN EVALUAREA COMPARATIVĂ A ZGOMOTULUI PROPRIU AL FILTRELOR ANALOGICE ȘI NUMERICE

Dacă filtrul activ RC (schema Sallen-Key, Partea I) realizează doar numai funcția de transfer FTJ, filtrul numeric de ordinul 6 poate simula orice caracteristică și nu numai a dispozitivelor de selecție a semnalelor prin frecvență, ci și a... reguletoarelor, dat fiind faptul că noțiunea generală de filtru numeric include și noțiunea de *regulator numeric*. Funcția de transfer în z al oricărui sistem corector cu eșantionare poate fi tratată prin conceptele filtrării numerice.

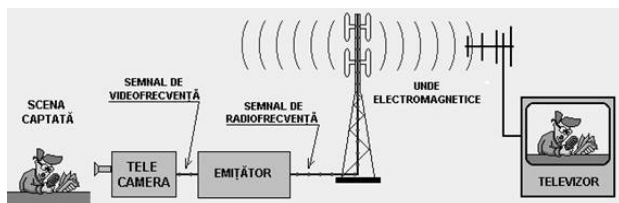


Figura 15 (12).

Astfel, filtrele numerice pot realiza orice comportări cerute reguletoarelor – proporțional P , proporțional integral PI , proporțional integral și diferențiator PID , de întârziere etc. Excelent! Doar că toate acestea pot fi realizate în sisteme cu semnale bine determinate și suficient de puternice, când zgomotul propriu al zecilor și sutelor de elemente active și pasive nu influențează funcționarea corectă a dispozitivelor și echipamentelor, în ansamblu. De aceea, filtrele numerice pot fi utilizate oriunde, cu excepția etajelor primare ale instalațiilor de captare și prelucrare a semnalelor de mică putere (zecimi de μW), care se pot „pierde” în zgomotul propriu al acestor instalații. Cele spuse pot fi confirmate prin rezultatele măsurărilor, efectuate cu ajutorul instalației de măsurare propuse în [3]; zgomotul propriu al filtrului activ RC din figura 10, măsurat la ieșirea filtrului cu bornele de intrare scurtcircuitate, a fost egal cu $3,7 \times 10^{-5} \text{ V/Hz}^{1/2}$. Zgomotul propriu al filtrului numeric doar de ordinul 2 (două etaje, figura 11), măsurat în aceleași condiții a fost egal cu $21 \times 10^{-5} \text{ V/Hz}^{1/2}$, adică de cinci ori mai mare, ceea ce poate fi explicat prin numărul excesiv (redondanța) de dispozitive și circuite active.

Deși filtrele numerice convertesc semnalul analogic în cod numeric, garantând astfel o siguranță avansată și certă independență de tot felul de perturbații exterioare (câmpuri electrostatice și magnetice, descărcări electrice, interferențe și

bruiaj, perturbații prin rețeaua de alimentare etc.), zgomotul propriu își lasă amprenta asupra calității rezultatului final – imagini în cazul emisiunilor televizate (figura 15), voce și fragmente muzicale în cazul legăturilor radio, telecomunicații și telefonie mobilă (figura 16).

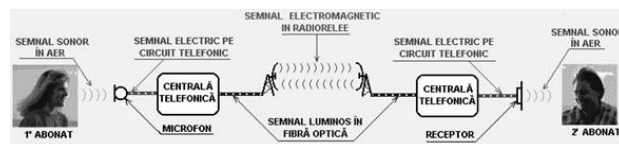


Figura 16.

Zgomotul propriu se suprapune pe semnalul util (figura 17, *a* și *b*) și apare necesitatea de „curățare” a acestuia (figura 17, *c*), ceea ce nu totdeauna se reușește cu mijloace simple – în figura 17, *e* este arătat că în tendința micșorării zgomotului a fost atenuat...semnalul util, zgomotul continuând bine-mersi!

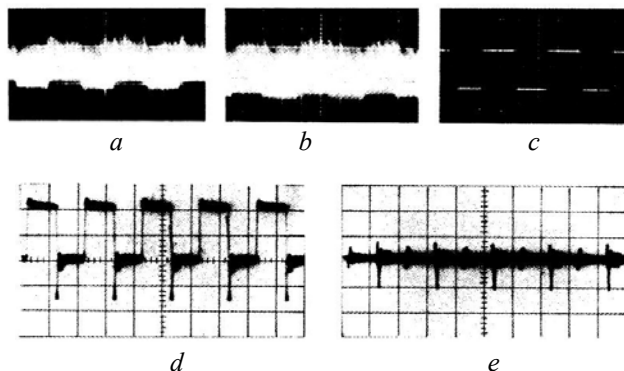


Figura 17. Influența zgomotului propriu asupra funcționării unui CBBS.



Figura 18. Reprezentarea alegorică a raportului semnal/zgomot.

Chiar și în cazul când relația semnal/zgomot este în favoarea numărătorului, sau a figurantului cu fața spre cititor din tabloul metaforic (figura 18), aceasta nu garantează o interpretare absolut exactă și în sistemele numerice, nu neapărat filtre, ceea ce se poate vedea în figura 19, *a* și *b*.

Este clar, cât de nefavorabilă și nedorită este influența zgomotului electronic propriu în sistemele numerice de prelucrare a informației. Cât de paradoxal n-ar părea, dar acestei probleme nu i se acordă atenția cuvenită, dacă judecăm după numărul infim de publicații, dedicate acestei probleme și nivelul superficial de abordare.

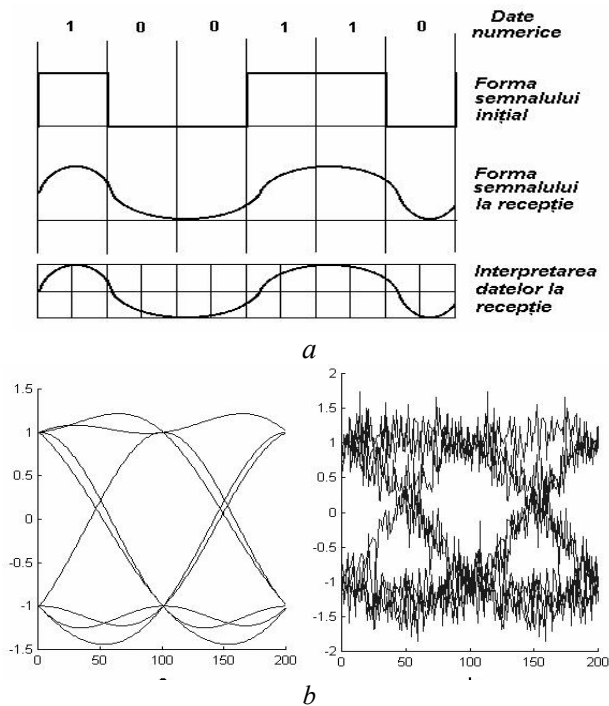


Figura 19. Erori de interpretare semnale.

De exemplu, în [1] putem citi: în tranzistoarele complementare cu efect de câmp și joncțiune *p-n* 2SJ72 și 2SK147 (firma Toshiba) este utilizată **geometria celulară** (bifarea noastră) a grilei, ceea ce a permis obținerea unei valori fenomenal de mici a tensiunii de zgomot

$$e_z = 0,7nV / Hz^{1/2},$$

ce corespunde zgomotului termic al unui rezistor de 30 Ω (citată încheiat). Formidabil, doar că prea laconic: fără metodă de calcul (dacă există) sau trimiteri spre alte surse. Sigur că pe parcursul câtorva decenii au apărut zeci de lucrări dedicate calculului parametrilor de zgomot al elementelor, dispozitivelor și circuitelor electronice. Doar numai un raport semnal/zgomot din figura alegorică (figura 18) poate garanta circuitelor (și filtrelor) numerice totdeauna succesul.

6. CONCLUZII

1. În procesul de prelucrare a informației un rol deosebit de important revine filtrării (selecției) semnalelor (prin frecvență). Aceasta se poate face fie analogic utilizând circuite oscilante *R-L-C* sau numeric, cu circuite logice (filtre numerice).
2. Filtrele numerice posedă avantaje față de cele analogice (inclusiv și filtrele active *RC*) - caracteristici precise și stabile, dimensiuni mici, nu se cere adoptarea de impedanțe și – foarte important – o flexibilitate remarcabilă: tipul filtrului poate fi modificat printr-o simplă schimbare de coeficienți .

3. Analiza comparativă a filtrelor numerice și a filtrelor active *RC* pune în evidență o particularitate deosebită a filtrelor numerice: redondanța, *id est* numărul excesiv de elemente active al circuitelor logice utilizate pentru realizarea funcțiilor de transfer *trece-jos*, *trece-sus* și *trece-bandă*. Elementele active (tranzistoarele bipolare sau cu efect de câmp, discrete sau integrate) prezintă sursa principală de zgomot *electronic propriu* al dispozitivelor și echipamentelor. Deci, din acest punct de vedere filtrele numerice nu sunt ireproșabile: nivelul de zgomot propriu depășește zgomotul propriu al filtrelor active *RC* analoage de zeci sau și sute de ori.

4. Filtrele numerice nu sunt influențate de tot felul de perturbații exterioare – câmpuri magnetice sau electrostatice, bruiaj și descărcări electrice, impulsuri stohastice prin rețeaua de alimentare. Zgomotul propriu însă poate influența interpretarea corectă a proceselor, de aceea filtrele numerice necesită semnale suficient de puternice. De aceea utilizarea lor în etajele de intrare ale instalațiilor de captare și prelucrare a informației sub forma de semnale electromagnetice nu este justificată, fiind de preferat în astfel de cazuri filtrele analogice, active *RC*.

Bibliografie

1. **Jawerth, B., Sweldens, W.** *An Overview of Wavelet Based Multiresolution*, Rep. of Dep. Mat. S.C. 1998.
2. **A. Van der Ziel**, *Noise Sources, characterization and measurement*, Prentice-Hall. Inc. 1970.
3. **Guțu V.** *Zgomotul electronic al filtrelor active RC*. Monografie, „TEHNICA INFO”, Chișinău 2010.
4. **Guțu V.** *The calculation of devices and equipment electronics own noise (Sallen-Kess circuits)*, *SIELMEN 2011 - 8th International Conference on Electromechanical and Power Systems, Craiova, Iași - România, 2011.*
5. **Dementiev E.P.** *Elementy obshhchej teorii linejnyx shumyashhix czepej*. Gosenergoizdat, M-L 1968.
6. **Ceangă E. ș.a.** *Sisteme, circuite și semnale. Partea I: Analiza semnalelor*. Editura ACADEMICA, Galați 2001.
7. **Macliucov, M .I.** *Inzhenernyj sintez aktivnyx fil'trov RC nizkix chyastot*. Izdatel. ENERGIYA, Moscova 1998.
8. **Sallen R., Key E.** *IRE Trans on C.Theory.v.CT-2, 1955.*
9. **Radu O., Sandulescu Ch.** *Filtre numerice. Aplicații*. Editura ACADEMICA, București-România, 2002.

Recomandat spre publicare: 18.04.2012.