Законы дисперсии трехуровневого атома с эквидистантным энергетическим спектром

О.В. Коровай, Л.Ю. Надькин
Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко
ПГУ им. Т.Г. Шевченко
Молдова, Тирасполь
olesya-korovai@mail.ru

Хаджи П.И.
Институт прикладной физики АН РМ
ИП АН РМ
Молдова, Кишинев

Abstract: The dispersion law for a system of three-level atoms with an equidistant energy spectrum interacting with resonant laser radiation is obtained, taking into account two successive one-photon optically resolved transitions and an optically resolved two-photon transition between the lower and upper levels. It is shown that the dispersion law consists of three polariton branches.

Keywords: anharmonic Bloch oscillations, array of optical fibers.

I. Введение.

Повышенное внимание в настоящее время уделяется исследованию процессов взаимодействия лазерного излучения с веществом в размерно-ограниченных средах. В ряде работ [1–5] представлены результаты исследований явления Бозе-Эйнштейновской конденсации и сверхтекучести в системах экситон-поляритонов в микрорезонаторах. Особый интерес представляют исследования явлений, обусловленных сильной связью фотонов с атомными системами. Нелинейно-оптические явления в трех– и многоуровневых атомных системах исследовались с учетом однофотонных индуцированных переходов между последовательными парами соседних уровней под действием света [6–9]. Вместе с тем в атомных трёхуровневых системах, например, возможны оптиечкси разрешенные прямые двухфотонные переходы между первым и третьим уровнями. В экситонной области спектра имеют место индуцированные светом однофотонные переходы из основного состояния кристалла в экситонное и из экситонного в биэкситонное, а также прямой двухфотонный переход из основного состояния кристалла в биэкситонное. В полупроводниках типа CdS, $CdSe$, где энергия связи биэкситона исчезающе мала, эта модель вещества по сути дела является эквидистантной трехуровневой моделью. Эквидистантные многоуровневые системы часто используют в теории каскадных лазеров [11,12], отметим, что модель квантового осциллятора также является эквидистантной. Насколько нам известно, одновременный учет однофотонных и двухфотонных переходов в динамике трехуровневых атомов не проводился.

II. Постановка задачи. Основные уравнения

Ниже представлены результаты исследований закона дисперсии трехуровневых атомов с эквидистантным энергетическим спектром, взаимодействующих с фотонами ультракороткого импульса резонансного лазерного излучения. При этом учитываются однофотонные переходы между уровнями $1 \leftrightarrows 2$ и $2 \leftrightarrows 3$, а также двухфотонные переходы под действием фотонов одного и того же импульса между уровнями 1 и 3 (рис.1). Хотя используемая схема эквидистантного энергетического спектра кажется специфической, тем не менее Λ, V и Σ – модели трехуровневых атомов широко используются в атомной оптике [10].

Гамильтониан взаимодействия атома с фотонами можно записать в виде:

$$\frac{1}{\hbar}\hat{H}_{int} = -g_{12}\hat{a}_1\hat{c}\hat{a}_2^{+} - g_{12}^{*}\hat{a}_2\hat{c}^{+}\hat{a}_1^{+} - g_{23}\hat{a}_2\hat{c}\hat{a}_3^{+} - g_{23}^{*}\hat{a}_3\hat{c}^{+}\hat{a}_2^{+} - -g_{13}\hat{a}_1\hat{c}\hat{c}\hat{a}_3^{+} - g_{13}^{*}\hat{a}_3\hat{c}^{+}\hat{c}^{+}\hat{a}_1^{+} \quad (1)$$

,

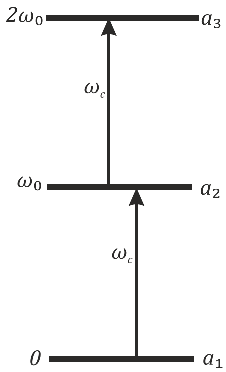

Рис. 1. Схема эквидистантного энергетического спектра трехуровневого атома, взаимодействующего с фотонами с частотой ω_c

где $\hat{a}_j (j = 1,2,3)$ – оператор уничтожения атома, находящегося на уровне j, $\hat{c}$ – оператор фотона с частотой ω_c, g_{ij} – константы однофотонной конверсии атома с уровня i на уровень j. Собственные энергии атомов на уровнях 2 и 3 равны соответственно ω_0 и $2\omega_0$ (рис.1). Однофотонные последовательные переходы между уровнями $1 \leftrightarrows 2$ и $2 \leftrightarrows 3$ считаются оптически разрешенными. Вместе с тем возможен также оптически разрешенный двухфотонный переход между уровнями $1 \leftrightarrows 3$ под действием фотонов того же импульса, что отражено последними двумя слагаемыми в (1). Предполагаем также, что падающий импульс имеет полуширину меньшую времени релаксации атомов. В этом случае процессами релаксации можно пренебречь, так как они не успевают срабатывать за время действия импульса.

В приближении заданной плотности фотонов образуют замкнутую систему из трех уравнений для амплитуд квазичастиц с одной и той же квазиэнергией $\hbar\omega_0 \approx \hbar\omega_c \approx \hbar(\Omega_0 - \omega_c)$:

$$
\begin{gathered}
i\dot{a}_2 = \omega_0 a_2 - g_{12}(a_1 c) - g_{23}^*(c^* a_3), \\
i(a_1 c)^\bullet = \omega_c(a_1 c) - g_{12}^* f_0 a_2 - g_{13}^* f_0 (c^* a_3), \qquad (2) \\
i(c^* a_3)^\bullet = (\Omega_0 - \omega_c)(c^* a_3) - g_{23} f_0 a_2 - g_{13} f_0 (a_1 c),
\end{gathered}
$$

где f_0 – (заданная) плотность фотонов. Полученная система уравнений (2) для функций a_2, $a_1 c$, $c^* a_3$ является линейной. Решение ее будем искать в виде: $a_2, a_1 c, c^* a_3 \sim e^{-i\omega t}$, где ω – искомая, собственная частота атомных поляритонов Тогда для стационарных амплитуд получаем алгебраическую систему из трех линейных уравнений, детерминант которой определяет закон дисперсии атомных поляритонов вида:

$$
(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_c)(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) - \Omega_{12}^2(\omega - 2\omega_0 + \omega_c) - \Omega_{23}^2(\omega - \omega_c) - \Omega_{13}^2(\omega - \omega_0) + 2\Omega_{12}\Omega_{23}\Omega_{13}\cos\vartheta = 0 \qquad (3)
$$

где

$$
\Omega_{12}^2 = g_{12}^2 f_0, \quad \Omega_{23}^2 = g_{23}^2 f_0, \quad \Omega_{13}^2 = g_{13}^2 f_0^2 \text{ –}
$$

соответствующие частоты Раби и ϑ – разность фаз между константами взаимодействия. Отсюда видно, что квадрат частоты Раби Ω_{12}^2 оптически разрешенного однофотонного перехода между первым и вторым уровнями пропорционален произведению квадрата матричного элемента g_{12}^2 перехода и плотности фотонов f_0. Квадрат частоты Раби Ω_{23}^2 однофотонного оптически разрешенного перехода между уровнями 2 и 3 пропорционален квадрату матричного элемента дипольного момента перехода g_{23}^2 и плотности фотонов. Наконец, квадрат частоты Раби Ω_{13}^2 пропорционален квадрату матричного элемента g_{13}^2 двухфотонного оптически разрешенного перехода между уровнями 1 и 3 и квадрату плотности фотонов.

Из (3) видно, что закон дисперсии атомных поляритонов имеет три действительных корня, которые формируют три дисперсионные ветви в зависимости частоты поляритонной волны ω от частоты $\omega_c = ck_c$ фотонов падающего импульса, где k_c – волновой вектор. Форма и расположение ветвей существенно определяются плотностями фотонов f_0. В (3) имеются три слагаемых, каждое из которых пропорционально квадрату соответствующей частоты Раби либо квадрату модуля соответствующего матричного элемента перехода. Эти три слагаемых описывают независимые вклады каждого из процессов в закон дисперсии. При этом знак соответствующей константы взаимодействия по отношению к двум другим в гамильтониане (1) не играет роли. Последнее слагаемое в (3) пропорционально произведению трех различных Раби-частот (либо трех констант взаимодействия g_{12}, g_{23} и g_{13}). Его появление обусловлено одновременным действием (квантовой интерференцией) всех трёх процессов. Если хотя бы одна из констант взаимодействия равна нулю, то это слагаемое отсутствует. При этом учет знаков констант или, точнее, фазовых соотношений между ними играет чрезвычайно важную роль, так как закон дисперсии зависит еще и от разности фаз ϑ между этими константами. Наличие последнего слагаемого в (3) является следствием когерентности процесса взаимодействия фотонов с атомами. По этой причине экспериментальное установление особенностей поведения закона дисперсии при одновременном учете всех трёх оптических переходов может способствовать установлению фазовых соотношений между константами взаимодействия.

III. Обсуждение результатов.

Рассмотрим подробнее особенности поведения закона дисперсии для трехуровневого атома с эквидистантным энергетическим спектром. Собственные частоты второго и третьего (возбужденных) уровней соответственно равны ω_0 и $2\omega_0$. На атом падают фотоны одного и того же импульса с частотой ω_c. Из (3) видно что при $\Omega_{13} = 0$ и $\Omega_{23} = 0$ (предел двухуровневого атома) уравнение (4) распадается на два уравнения: $(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_c) - \Omega_{12}^2 = 0$ и $\omega - 2\omega_0 + \omega_c = 0$, первое из которых представляет хорошо известное уравнение поляритонного типа, а второе – дисперсию «голых» фотонов, не взаимодействующих со средой. Обе поляритоноподобные ветви закона дисперсии пересекаются с прямой $\omega - 2\omega_0 + \omega_c = 0$ в двух точках C $\left(\omega - \Omega_{12}/\sqrt{2}, \omega + \Omega_{12}/\sqrt{2},\right)$ и D $\left(\omega + \Omega_{12}/\sqrt{2}, \omega - \Omega_{12}/\sqrt{2},\right)$ (рис.2*a*). Если теперь положить, например, $\Omega_{23} \neq 0$, но $\Omega_{13} = 0$, т.е. если включить взаимодействие фотона с атомом на переходе $2 \leftrightarrow 3$, то в этом случае уравнение (3) не распадается на два независимых уравнения. Вырожденные по энергии точки пересечения ветвей C и D расщепляются благодаря взаимодействию и формируются три отдельные ветви закона дисперсии: верхняя, средняя и нижняя. Верхняя и средняя ветви имеют экстремумы в окрестности точки C, а средняя и нижняя – в окрестности точки D. С ростом Ω_{23} величины расщеплений растут и положения экстремумов изменяются.

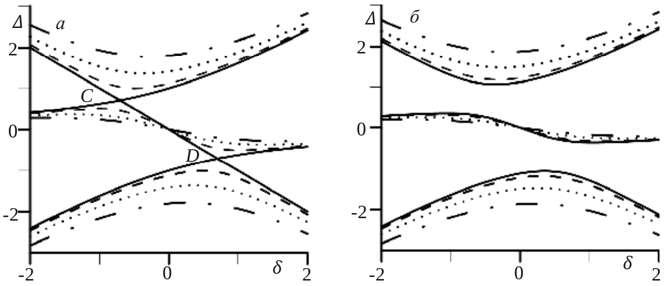

Рис 2. Законы дисперсии $\Delta = \frac{\omega - \omega_0}{\Omega_{12}}$ от $\delta = \frac{\omega_c - \omega_0}{\Omega_{12}}$ при значениях Ω_{23} , равных (а) 0 , (б) 0.5 при различных значениях Ω_{13} (0 – сплошные, 0,5 – штриховые, 1 – пунктирные, 1,5 – штрихпунктирные) и разности фаз $\vartheta = \pi/2$.

Введем далее нормированные частоты

$$
\Delta = \frac{\omega - \omega_0}{\Omega_{12}}, \quad \delta = \frac{\omega_c - \omega_0}{\Omega_{12}}, \quad \omega_{23} = \frac{\Omega_{23}}{\Omega_{12}}, \quad \omega_{13} = \frac{\Omega_{13}}{\Omega_{12}}. \qquad (4)
$$

Тогда дисперсионное уравнение (3) представляется в виде:

$$
\Delta^3 - \Delta(1 + \delta^2 + \omega_{23}^2 + \omega_{13}^2) + \delta(\omega_{23}^2 - 1) + 2\omega_{23}\omega_{13}\cos\vartheta = 0 \qquad (5)
$$

Из (5) видно, что закон дисперсии $\Delta(\delta)$ состоит из трех ветвей, имеющие как восходящие, так и нисходящие участки зависимости $\Delta(\delta)$. В общем случае решения уравнения (5) выражаются формулами:

$$\Delta_1 = \left(2/\sqrt{3}\right)\sqrt{1+\delta^2+\omega_{23}^2+\omega_{13}^2}\cos\frac{\alpha}{3},$$
$$\Delta_{2,3} = -\left(2/\sqrt{3}\right)\sqrt{1+\delta^2+\omega_{23}^2+\omega_{13}^2}\cos\frac{\alpha\pm\pi}{3}, \quad (6)$$

где

$$\cos\alpha = \frac{(\omega_{23}^2-1)\delta+2\omega_{23}\omega_{13}\cos\vartheta}{(2/3\sqrt{3})(1+\delta^2+\omega_{23}^2+\omega_{13}^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Рассмотрим $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (рис.2).Из рис.2 *а* видно, что при $\omega_{13} \neq 0$ и $\omega_{23} \neq 0$ точки C и D расщепляются, возникают три отдельных ветви закона дисперсии, которые характеризуются наличием восходящих и нисходящих участков зависимости $\Delta(\delta)$. С ростом ω_{13} ветви закона дисперсии удаляются друг от друга (рис.2 *а-б*). Минимумы верхней ветви постепенно смещаются в коротковолновую сторону, максимумы нижней ветви – в длинноволновую сторону, а средняя ветвь медленно изменяет свой профиль с ростом δ, оставаясь в окрестности прямой $\Delta = 0$. При $\omega_{23} = \omega_{13}$ верхняя и нижняя ветви становятся зеркально симметричными как относительно $\Delta = 0$, так и относительно $\delta = 0$, а средняя ветвь располагается на прямой $\Delta = 0$ при любых значениях ω_{13}. Соответственно координаты верхней и нижней поляритонных ветвей определяются формулами $\Delta = \pm\sqrt{1+\delta^2+\omega_{23}^2+\omega_{13}^2}$. Таким образом с ростом $|\delta|$ собственные частоты нижней и верхней поляритонных ветвей растут. Экстремумы нижней и верхней поляритонных ветвей при больших ω_{23} продолжают свое смещение. Кроме того, возникает более яркое поведение средней ветви, ее изменение вдоль оси Δ существенно увеличивается. Следует отметить, что средняя ветвь закона дисперсии располагается на прямой $\Delta = 0$ (т.е. она не изменяется при изменении δ) при значениях параметров $\omega_{23} = 1$ и любых значениях ω_{13}. Таким образом, из рис.2*а,б* следует, что форма и положение ветвей закона дисперсии атомных поляритонов существенно определяются частотами Раби $\Omega_{12}, \Omega_{23}, \Omega_{13}$.

Обсудим поведение ветвей закона дисперсии для случая $\vartheta = 0$ (рис. 3). Графики зависимости $\Delta(\delta)$ при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = 0$ на рис.3*а* совпадают с рис.2*а* при $\omega_{23} = 0$. Это обусловлено тем, что при $\omega_{23} = 0$ слагаемое с $\cos\vartheta$ обращается в нуль. Отличие в поведении ветвей закона дисперсии возникают, только когда все частоты Раби отличны от нуля, т.е. когда слагаемое с $\cos\vartheta$ отлично от нуля.

Из (6) видно, что средняя ветвь закона дисперсии совпадает с прямой $\Delta = 0$ при $\omega_{23} = 1$ и $\omega_{13} = 0$. Существенные отличия видны на рис.3 и 2*б*. Если на рис.2*б* имеет место все возрастающее расталкивание средней и верхней ветвей закона дисперсии с ростом ω_{13} при фиксированном значении $\omega_{23} = 0{,}5$, то на рис.3 этот процесс замедлен и ветви закона дисперсии с ростом ω_{13} располагаются в определенной области, ограниченной средней и нижней ветвями (сплошные кривые). С ростом ω_{13} сначала имеет место эффект притяжения между средней и верхней ветвями, а затем возникает расталкивание, тогда как между нижней и средней ветвями существуют только расталкивание ветвей. Верхняя и нижняя поляритонные ветви при $\omega_{13} = 0$ располагаются симметрично относительно средней ветви. Асимметрия возникает при увеличении ω_{13}, где средняя и верхняя ветви сначала сближаются с ростом ω_{13}, затем начинают удаляться друг от друга. Кроме того, при $\omega_{23} = \omega_{13} = 1$ верхняя и средняя ветви закона дисперсии пересекаются, затем снова расталкиваются. Таким образом имеет место эффект спектрального сближения верхней и средней ветвей с ростом ω_{13} и их пересечение при $\omega_{23} = \omega_{13} = 1$ (пунктирные линии) и затем последующее удаление.

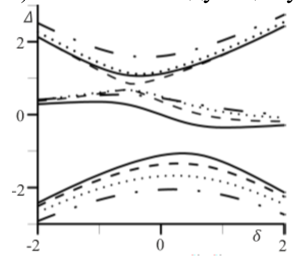

Рис 3. Законы дисперсии $\Delta = \frac{\omega-\omega_0}{\Omega_{12}}$ от $\delta = \frac{\omega_c-\omega_0}{\Omega_{12}}$ при значениях $\Omega_{23} = 0{,}5$ при различных значениях Ω_{13} (0 – сплошные, 0,5 – штриховые, 1 – пунктирные, 1,5 – штрихпунктирные) и разности фаз $\vartheta = 0$.

Из рис.3 следует, что имеет место сильное расталкивание между нижней и средней ветвями закона дисперсии. Эту особенность поведения ветвей закона дисперсии можно интерпретировать также как изменение силы связи фотона с атомом. Таким образом, перенормировка энергетического спектра поляритонов ярко проявляется в возникновении эффекта сильной связи в длинноволновой области от частоты ω_0 и в ослаблении связи в коротковолновой области.

Результаты, представленные на рис.4 для $\vartheta = \pi$, подобны результатам с рис.3 для $\vartheta = 0$ (после замены Δ и δ на $-\Delta$ и $-\delta$ соответственно). Видно, что основные особенности, а именно эффект спектрального сближения, пересечения и последующего расталкивания возникает теперь между нижней и средней ветвями закона дисперсии.

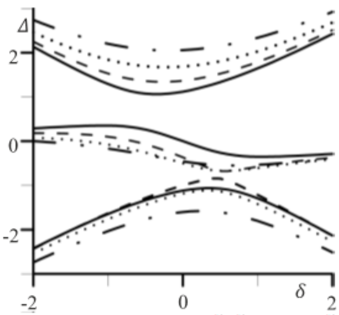

Рис 4. Законы дисперсии $\Delta = \frac{\omega-\omega_0}{\Omega_{12}}$ от $\delta = \frac{\omega_c-\omega_0}{\Omega_{12}}$ при значениях $\Omega_{23} = 0{,}5$ при различных значениях Ω_{13} (0 – сплошные, 0,5 – штриховые, 1 – пунктирные, 1,5 – штрихпунктирные) и разности фаз $\vartheta = \pi$.

Собственные частоты трех ветвей поляритонов существенно зависят от уровня возбуждения атомной системы. Они определяют частоты нутации $\tilde{\Omega}_{12}$, $\tilde{\Omega}_{23}$, $\tilde{\Omega}_{13}$ (новые Раби – частоты) поляритонов, которые представляют собой три разности собственных частот поляритонов. Если частоты двух поляритонов, например, верхнего и среднего поляритонов совпадают, то соответствующая частота нутации оказывается равной нулю. В этом случае процесс нутации не является результатом биения трех поляритонных ветвей, а представляет собой нутационные колебания на одной единственной частоте.

IV. Заключение

В заключение отметим, что в статье представлены результаты теоретического исследования закона дисперсии атомных поляритонов для трёхуровневых атомов с эквидистантным энергетическим спектром, взаимодействующих с мощным резонансным лазерным излучением. Показано, что закон дисперсии атомных поляритонов состоит из трех ветвей, положение и форма которых определяется Раби – частотами оптически разрешенных однофотонных переходов между уровнями $1 \leftrightarrows 2$ и $2 \leftrightarrows 3$, а также оптически разрешенным двухфотонным переходом между уровнями $1 \leftrightarrows 3$. Предсказываются эффекты расталкивания и притяжения ветвей закона дисперсии, их пересечение, самосогласованное изменение силы связи фотонов с атомами, а также сильная зависимость от разности фаз между константами взаимодействия.

References

[1] H. Deng, H. Haug, Y. Yamamoto, Rev. Mod. Phys. 82, 1489 (2010).

[2] I. Carusotto, C. Ciuti, Rev. Mod. Phys. 85, 299 (2013).

[3] Y. Kasprzak, M. Richard, S. Kindermann, A. Baas, P. Jeambrum, J.M.J. Keeling, F. M. Marchetti, M.H. Szymanska, R. Andre, J.L. Staehli, V. Savona, P.B. Littlewod, B. Deveaud, L.S. Dang, Nature 443, 409 (2006).

[4] R.Balili, V.Hartwell, D.Snoke, L.Pfeiffer, K.West, Science 316, 1007 (2007).

[5] A. Kogar, M.S. Rak, S.Vig, A.A. Husain, F. Flicker, Y.I. Joe, L. Venema, G.J. MacDougall, T.C. Chiang, E. Fradkin, Y. van Vezel, P. Abbamonte, Science 358, 1314 (2017).

[6] Д.И. Груев, Квантовая электроника 2, 2487 (1975).

[7] М.Л. Тер-Микаелян, УФН 167, 1249 (1997).

[8] Н.Б. Делоне, В.П. Крайнов, Атом в сильном световом поле, Атомиздат, Москва, (1978).

[9] R.M. Whitly and C.R. Stroud, Jr., Phys. Rev. A14, 1498 (1976).

[10] М.О. Скалли, М.С. Зубайри, Квантовая оптика, Физматлит., Москва, 2003.

[11] T.C. H. Liew, A.V. Kavokin, ArXiv:1706.08635, 27 Jun 2017.

[12] T.C.H. Liew, M.M. Glazov, K.V. Kavokin, I.A. Shelykh, M.A. Kaliteevski, A.V. Kavokin, Phys. Rev. Lett. 110, 047402 (2013).

.