

TRUSA DE MECANICĂ ASISTATĂ DE CALCULATOR. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A PRINCIPIULUI FUNDAMENTAL AL DINAMICII ÎN MIȘCAREA DE TRANSLAȚIE A UNUI MOBIL PE UN PLAN ORIZONTAL

Alexandru RUSU, Constantin PÎRȚAC
preuniversitas@gmail.com

Se analizează posibilitățile utilizării trusei de mecanică asistate de calculator la verificarea experimentală a principiului fundamental al dinamicii mișcării de translație în cazul mișcării unui cărucior planul orizontal. Se prezintă posibilitățile softurilor elaborate pentru achiziția și procesarea datelor, precum și perfectarea referatului la experiența efectuată. Se analizează cazurile când pe parcursul experienței se menține constantă masa sistemului, odată creând condiții pentru neglijarea forței de frecare (rezistență) și altă dată ținând seama de aceasta. Se prezintă, de asemenea, cazul când pe parcursul experienței se menține constantă forța ce pune în mișcare căruciorul. Se analizează rezultatele obținute pentru un nivel de confidență de 68,3%.

Principiul fundamental al dinamicii mișcării de translație

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

poate fi verificat nu numai la mișcarea mobilului pe un plan înclinat [1], ci și la mișcarea lui pe un plan orizontal. Vom cerceta mai întâi cazul când masa sistemului rămâne neschimbată pe parcursul experienței: $m = \text{const}$. În acest caz din (1) rezultă că accelerația mobilului este direct proporțională cu forța (rezultanta forțelor) \vec{F} ce acționează asupra lui:

$$a \propto F, m = \text{const}. \quad (2)$$

Astfel, în acest caz graficul dependenței accelerației a de rezultanta F trebuie să reprezinte un segment de dreaptă cu panta $p = 1/m$, dacă principiul fundamental al dinamicii mișcării de translație este just. Relația fundamentală (2) poate fi verificată experimental cu ajutorul montajului din *fig. 1*, în care planul este stabilit în poziție orizontală. Pe plan se situează un cărucior cu taler pentru mase, obturator și sfoabă pentru legarea firelor, toate fixate pe cărucior. Pe talerul căruciorului se pun 5 sau mai multe mase identice mici, după numărul seriilor de măsurări ce vor fi efectuate, de exemplu, mase m_0 de 4-6 g fiecare, apoi de sfoabă se leagă un fir subțire trecut peste scripete. De celălalt capăt al firului se suspendă un săculeț foarte ușor. Adăugând în el câte puțin nisip atingem starea când căruciorul abia – abia începe să se miște. Cântărind săculețul cu nisip putem estima forța de frecare (rezistență) ce acționează asupra sistemului: $F'_{fr} = m'g$, unde m' este masa săculețului cu nisip. În continuare, prin cântărire determinăm masa m_1 a sistemului

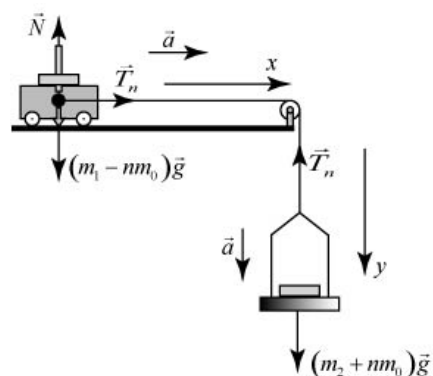


Fig. 1

constituit din căruciorul cu scoaba pentru fir, taler, obturator, cele 5 sau mai multe mase m_0 și masa m_2 a talerului suspendat (fig. 1), cu care se înlocuiește săculețul. Notăm $m = m_1 + m_2$. Pentru a putea neglija forța de frecare (rezistență) ce acționează asupra sistemului trebuie ca $F'_{fr} = m'g \ll m_2g$, adică $m_2 \ll m'$. Dacă această condiție nu este satisfăcută suficient de bine, atunci pe talerul suspendat se mai poate adăuga o oarecare masă suplimentară, incluzând-o în m_2 . Mutăm de pe talerul căruciorului pe talerul suspendat 0,1,2,3,...,n mase m_0 și eliberăm sistemul. Accelerația acestuia poate fi determinată, reieșind din principiul fundamental (1), scris în proiecții pe axele x și y (fig. 1):

$$\begin{cases} T_n = (m_1 - nm_0)a_n \\ (m_2 + nm_0)g - T_n = (m_2 + nm_0)a_n \end{cases}$$

De aici se obține:

$$a_n = \frac{(m_2 + nm_0)g}{m} \quad (3)$$

Această relație este echivalentă principiului fundamental (2) și poate fi interpretată ca relația dintre accelerația a_n a sistemului de masa $m = m_1 + m_2 = const$ și forța $F = (m_2 + nm_0)g$ ce acționează asupra lui. Accelerația sistemului a_n poate fi măsurată indirect prin metode cinematice, de exemplu, cu ajutorul formulei

$$a_n = \frac{d/t_3 - d/t_1}{t_1/2 + t_2 + t_3/2} \quad (4)$$

efectuând pentru fiecare valoare a numărului n câte o serie de măsurători. Intervalele de timp t_1, t_2, t_3 coincid cu cele descrise în [2], iar d este diametrul obturatorului înșurubat în cărucior. Relația (3) poate fi considerată drept o funcție liniară de tipul

$$Y = pX + b \quad (5)$$

unde $Y = a_n$, $X = (m_2 + nm_0)g$ și $p = 1/m$. Termenul liber în (3) este $b \approx 0$, întrucât am presupus că forța de frecare (rezistență) în axele roților căruciorului și axa scripetelui poate fi neglijată ($F_{fr} \approx 0$). În acest caz graficul dependenței (3) trebuie să treacă prin originea de coordonate. Dar, ce s-ar schimba, dacă forța de frecare ar fi $F_{fr} \neq 0$, dar aceeași pentru toate valorile numărului n ? Răspunsul este că, această forță ar micșora valorile accelerației cu aceeași mărime mică, deplasând puțin întregul grafic (fig. 2) în sens opus sensului axei ordonate și făcând ca acesta să nu mai treacă prin origine după cum o cere dependența (3), ci să taie pe axele de coordonate niște segmente. Alte schimbări nu ar interveni.

De aici rezultă că neglijarea forței de frecare conduce la apariția unei erori sistematice la determinarea accelerației, influența căreia asupra valorii pantei drepte poate fi eliminată [3]. Forța de frecare $F_{fr} \neq 0$ reprezintă eroarea sistematică comisă la determinarea rezultantei forțelor ce acționează asupra sistemului. Dacă $F_{fr} = const$, atunci această forță nu poate influența caracterul liniar al dependenței (3) și nici valoarea pantei drepte ce o reprezintă. Astfel, în această experiență principiul fundamental va putea fi considerat ca și verificat, dacă graficul dependenței (3) va reprezenta un segment de dreaptă (fig. 2) cu panta

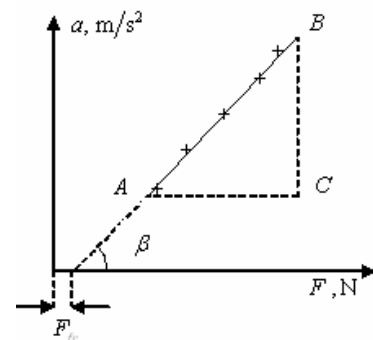


Fig. 2

$$p = \operatorname{tg} \beta = BC/AC = 1/m \quad (6)$$

Forța de frecare (rezistență) în axele roților căruciorului și axa scripetelui poate fi considerată aproximativ aceeași pentru toate valorile numărului n , numai dacă masa talerului suspendat $m_2 \ll nm_0$. În acest caz formula (3) capătă aspectul

$$a_n = \frac{(m_2 + nm_0)g - F_{fr}}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

De aici se observă că eroarea sistematică comisă la determinarea accelerației este $b = -F_{fr}/m$, deci, se poate estima forța de frecare $F_{fr} = -mb$ (eroarea sistematică comisă la determinarea rezultantei forțelor exterioare), dacă b este calculat cu metoda celor mai mici pătrate, sau măsurat din graficul dependenței (3) construit manual. Graficul dependenței (3) se poate construi după n puncte experimentale (după numărul de serii de măsurări corespunzătoare celor $0, 1, 2, 3, \dots, n$ mase m_0 mutate de pe talerul căruciorului pe talerul suspendat) (fig. 2). Dacă la efectuarea experienței se folosește softul pentru achiziția și procesarea datelor la calculator, atunci se pot efectua $n \geq 5$ serii (pentru $n \geq 5$ valori ale masei talerului suspendat luate în creștere sau descreștere) a câte $N \geq 10$ măsurări a intervalelor de timp t_1, t_2, t_3 . În acest caz atât panta dreptei p , termenul liber b , cât și erorile lor absolute Δp , Δb și relativă $\varepsilon = \Delta p/p$ se vor calcula automat urmând metoda celor mai mici pătrate [3].

La efectuarea experienței căruciorul trebuie să se miște stabil pe pistele planului.

Introduceti: numarul de serii n : numarul de masurari N :

diametrul d al obturatorului: m;

acceleratia gravitacionala g : m/s²;

masa caruciorului m_1 : kg; masa talerului m_2 : kg;

numarul maselor mutate n : ; valoarea masei m_0 : kg;

t_1, s	t_2, s	t_3, s	$a, m/s^2$
0,019	0,1946	0,0126	1,2706
0,0189	0,1932	0,0125	1,29679
0,019	0,1942	0,0126	1,27302
0,0191	0,194	0,0126	1,28706
0,0191	0,1931	0,0127	1,2624
0,019	0,1946	0,0126	1,2706
0,019	0,1936	0,0126	1,27667
0,0191	0,1937	0,0126	1,28891
0,0191	0,1928	0,0126	1,29447
0,019	0,194	0,0126	1,27424

$(m_2 + nm_0)g = 0,5729 \text{ kg m/s}^2$

Media | |

Fig. 3

Stabilitatea mișcării căruciorului se poate asigura folosind o masă m_2 a talerului suspendat nu prea mică. Cum formula (4) este valabilă pentru obturatoare de orice diametru d , se pot folosi obturatoare mai groase, întrucât în acest caz intervalele de timp t_1 și t_3 vor fi mai mari, iar erorile comise la măsurarea lor vor fi mai mici. Dacă se ține seama de aceste nuanțe la efectuarea experienței, atunci valorile accelerației a_n nu se vor deosebi prea mult una de alta în cadrul aceleiași serii de măsurări.

În *fig. 3* este reprezentată fereastra „Efectuarea măsurărilor” din softul elaborat pentru această experiență după efectuarea primei serii de măsurări. Aici a fost prevăzută efectuarea a 5 serii din câte 10 măsurări indirecte a accelerației căruciorului de masa $m_1 = 0,3514$ kg, în care sunt incluse masele obturatorului cu diametrul $d = 10$ mm, scoabei pentru legarea firului, talerului cu 4 mase identice de $m_0 = 0,006$ kg fiecare. Pentru asigurarea condiției $m_2 \ll m'$ pe talerul suspendat a fost plasată o masă suplimentară de 50 g, masa acestuia fiind $m_2 = 0,0584$ kg. În prima serie de măsurări nu a fost mutată nici o masă m_0 ($n = 0$). La terminarea primei serii de măsurări această valoare dispare, cerându-se mutarea unei mase m_0 ($n = 1$) de pe un taler pe altul și introducerea acestuia în celula respectivă. Terminarea fiecărei serii de măsurări este însoțită de afișarea valorii medii a accelerației sistemului și a valorii mărimii $(m_2 + nm_0)g = 0,5729$ kg/m/s² ce se calculează pentru fiecare serie o singură dată.

În *fig. 4* este reprezentat graficul dependenței (3) construit la calculator în urma procesării datelor pentru mărimile m, m_2, m_0, g, d (*fig. 3*), precum și a intervalelor de timp t_1, t_2, t_3 achiziționate de la cronometrul electronic în 6 serii ($n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) a câte $N = 10$ măsurări. În experiență a fost utilizat obturatorul cu diametrul $d = 0,015$ m, masa căruciorului împreună cu cele 5 mase identice a câte $m_0 = 0,00615$ kg a fost $m_1 = 0,4065$ kg, iar masa talerului suspendat - $m_2 = 0,06$ kg. S-a obținut un segment de dreaptă cu panta $p = (2,05 \pm 0,05)$ kg⁻¹. Valoarea așteptată din teorie a pantei $p_{teor} = 1/(m_1 + m_2) = 2,1$ kg⁻¹ se află în interiorul intervalului de încredere obținut în experiment. Aceste rezultate confirmă veridicitatea principiului fundamental al dinamicii mișcării de translație în experiență. Valoarea estimată a forței de frecare (rezistență) la mișcarea căruciorului este $F_{fr} \approx 0,02$ N. În prima serie de măsurări când $n = 0$ forța de frecare (rezistență) alcătuiește 2,8 % din forța de tensiune a firului, iar în seria a 6-a - 2,2 %. Aceste valori ale forței de frecare (rezistență) sunt de ordinul erorii întâmplătoare $\varepsilon = 2,6$ % comise în experiență la determinarea pantei drepte. Eroarea absolută comisă la determinarea pantei coincide cu eroarea standard, ceea ce corespunde unui nivel de încredere de 68,3%.

Dacă forța (rezultanta forțelor) \vec{F} ce acționează asupra mobilului nu variază ($\vec{F} = const$), atunci din expresia (1) pentru principiul fundamental al dinamicii mișcării de translație rezultă că accelerația mobilului este invers proporțională cu masa lui m :

$$a \propto 1/m, F = const. \quad (8)$$

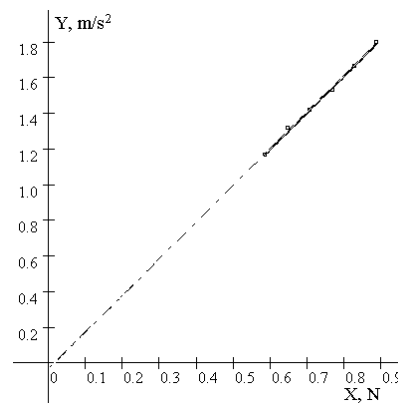


Fig. 4

Aceasta înseamnă că, în acest caz, graficul dependenței accelerației a de mărimea $1/m$ trebuie să reprezinte o linie dreaptă. Relația fundamentală (8) poate fi verificată experimental cu ajutorul montajului din *fig. 5*, în care planul este așezat cu ajutorul nivelmetrului în poziție orizontală. Pe talerul suspendat se pune o masă de 50 g, care se include în masa acestuia m_2 , astfel încât forța de tensiune a firului să întrecă cu mult forța de frecare (rezistență) din axa scripetelui și axele căruciorului de masa m_1 . În acest caz forța de frecare (rezistență) poate fi neglijată în comparație cu forța de tensiune a firului. Dacă pe talerul căruciorului se află n mase identice m_0 , atunci la eliberarea talerului suspendat sistemul se va mișca cu accelerația a_n determinată din ecuația principiului fundamental (1) scrisă în proiecții pe axele x și y (*fig. 5*):

$$\begin{cases} T_n = (m_1 + nm_0) a_n \\ m_2 g - T_n = m_2 a_n \end{cases}$$

De aici se obține:

$$a_n = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + nm_0}, \quad (9)$$

unde $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. Formula (9) este echivalentă principiului fundamental al dinamicii mișcării de translație și poate fi interpretată ca relația dintre accelerația a_n a sistemului de masa $m_1 + m_2 + nm_0$ și forța $F = m_2 g = \text{const}$ ce acționează asupra lui. Ea este o funcție liniară de tipul (5), unde $X = m_2 / (m_1 + m_2 + nm_0)$, $Y = a_n$ și $p = g$.

Accelerația sistemului a_n va fi determinată prin metode

cinematice, de exemplu, cu formula (4) [2], efectuând pentru fiecare valoare a numărului de mase identice plasate pe cărucior $n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ câte o serie din $N \approx 10$ măsurători, dacă se folosește softul pentru achiziția și procesarea datelor la calculator. În caz contrar se va lua un număr mai mic de repetări. Panta acestei drepte, termenul liber, precum și erorile lor se vor calcula prin metoda celor mai mici pătrate. Astfel principiul fundamental (8) va putea fi considerat ca și justificat, dacă graficul dependenței accelerației $Y = a_n$ în funcție de parametrul $X = m_2 / (m_1 + m_2 + nm_0)$ va reprezenta un segment de dreaptă cu panta $p \approx g$. Fereastra „Efectuarea măsurărilor” din softul elaborat nu se deosebește esențial de această fereastră utilizată în experiența precedentă (*fig. 3*).

Aici sunt valabile observațiile din experiența precedentă privind stabilitatea mișcării căruciorului și privind grosimea obturatorului utilizat. Pentru a obține în calitate de grafic un segment de dreaptă mai lung se pot lua mase m_0 nu prea mici, de exemplu, de aproximativ 20 g. Însă masele m_0 nu pot fi luate prea mari, întrucât în acest caz la trecerea de la o serie de măsurări la alta va varia mai mult forța de frecare (rezistență) în axele căruciorului și axa scripetelui ceea ce poate afecta caracterul liniar al dependenței (9).

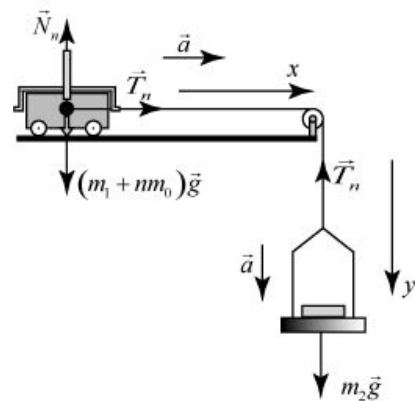


Fig. 5

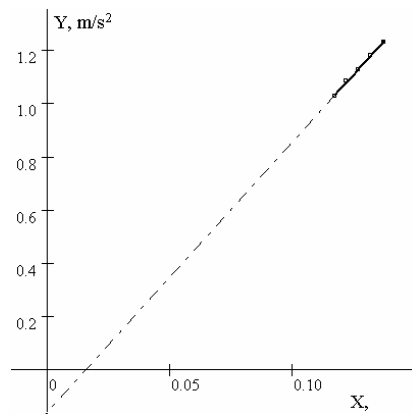


Fig. 6

În *fig. 6* este reprezentat graficul dependenței (9) construit la calculator în urma procesării datelor achiziționate la efectuarea a 5 ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) serii din câte 10 măsurări. Trecerea de la o serie de măsurări la alta s-a efectuat prin adăugarea unei mase $m_0 = 18,5$ g pe talerul căruciorului. Masa căruciorului cu obturator, scoabă pentru legarea firului și taler pentru masele identice a fost $m_1 = 0,376$ kg, iar masa talerului suspendat $m_2 = 0,06$ kg. Graficul dependenței (9) reprezintă un segment de dreaptă cu panta $p = (10.1 \pm 0.3) \text{ m/s}^2$, fapt ce confirmă veridicitatea principiului fundamental al dinamicii mișcării de translație, întrucât valoarea așteptată din teorie a pantei $p_{teor} = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ se află în interiorul intervalului de încredere obținut în experiment. Ca și în experiența precedentă eroarea absolută a pantei drepte coincide cu eroarea standard, avându-se în vedere un nivel de încredere de 68,3%.

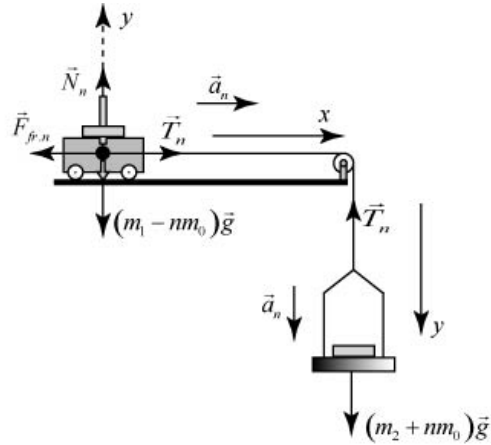


Fig.7

Relația fundamentală (2) poate fi verificată și în cazul când forța de frecare (rezistență) F_{fr} este comparabilă cu $m_2 g$ și, prin urmare, nu mai poate fi neglijată, impunându-se luarea ei în seamă. Pentru a accentua valoarea forței de frecare (rezistență) se pot îmbrăca pe obturatorul căruciorului una sau câteva mase de 50 g, care vor intra în m_1 (*fig. 7*). Pe talerul căruciorului se mai pun $n \geq 5$ mase identice mici de 2-3 g, care, de asemenea, intră în m_1 . Mutăm de pe talerul căruciorului pe cel suspendat $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots$ mase m_0 . Ecuația legii fundamentale a dinamicii scrisă în proiecții pe axele x și y pentru ambele corpuri va avea aspectul (*fig. 7*):

$$\begin{cases} T_n - F_{fr,n} = (m_1 - nm_0) a_n \\ N_n - (m_1 - nm_0) g = 0 \\ F_{fr,n} = \mu N_n \\ (m_2 + nm_0) g - T_n = (m_2 + nm_0) a_n \end{cases}$$

De aici obținem accelerația sistemului:

$$a_n = \frac{m_1 - nm_0}{m_1 + m_2} \left(\frac{m_2 + nm_0}{m_1 - nm_0} - \mu \right) g. \quad (10)$$

Această formulă poate fi interpretată ca relația dintre accelerația a_n a sistemului de masa $m = m_1 + m_2 = \text{const}$ și forța $F_n = (m_1 - nm_0) \left[\frac{m_2 + nm_0}{m_1 - nm_0} - \mu \right] g$ ce acționează asupra lui. Dacă $\mu \rightarrow 0$, relația (10) trece în (3), dar dacă $\mu \neq 0$ atunci ea poate fi reprezentată astfel:

$$a_n = [\eta(1 + \mu) - \mu] g, \quad (11)$$

unde

$$\eta = \frac{m_2 + nm_0}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

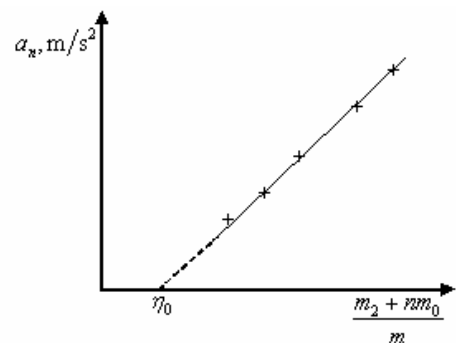


Fig. 8

Din (11) rezultă că accelerația sistemului este o funcție liniară de parametrul η de tipul (5). Astfel, construind după punctele experimentale graficul dependenței accelerației de acest parametru trebuie să obținem un segment de dreaptă (fig. 8) cu panta $p = g(1 + \mu)$, dacă principiul fundamental al dinamicii mișcării de translație este just. Accelerația sistemului se va determina folosind formula (4) pentru fiecare din cele n serii a câte $N \geq 10$ repetări [2]. Extrapolând segmentul de dreaptă până la intersecția lui cu axa absciselor, vom obține valoarea parametrului h_0 (fig. 8), pentru care accelerația se anulează ($a_n = 0$), adică $\eta_0(1 + \mu) - \mu = 0$. De aici obținem valoarea coeficientului de frecare (rezistență):

$$\mu = \eta_0 / (1 - \eta_0). \quad (13)$$

Din (13) rezultă că, dacă $\eta_0 \ll 1$, în numitorul expresiei acesta poate fi neglijat și $\mu \approx \eta_0$.

Pentru verificarea experimentală a relației (11) se vor măsura (o singură dată) mărimile m_1, m_2, m_0 și d , apoi se vor efectua $n \geq 5$ serii a câte $N \geq 10$ măsurări a intervalelor de timp t_1, t_2, t_3 . Acestea coincid cu intervalele descrise în [2] și permit determinarea valorii medii a accelerației sistemului în fiecare serie de măsurări. În scopul procesării valorilor mărimilor m_1, m_2, m_0, d , a intervalelor de timp t_1, t_2, t_3 achiziționate la calculator de la cronometrul electronic, precum și perfectării referatului a fost elaborat un soft analog cu cel utilizat în experiențele precedente (fig. 3).

În fig. 9 este reprezentat graficul dependenței (11) construit la calculator în urma procesării prin metoda celor mai mici pătrate a datelor achiziționate în 6 serii a câte 20 de măsurări a intervalelor de timp t_1, t_2, t_3 . Trecerea de la o serie de măsurări la alta s-a efectuat prin mutarea de pe talerul căruciorului pe cel suspendat a unei mase $m_0 = 3,07 \text{ g}$. Acest grafic reprezintă un segment de dreaptă cu panta $p = (10,0 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$. Pentru coeficientul de frecare (rezistență) s-a obținut o valoare ($\mu = 0,014$) apropiată de cea obținută în alte experiențe [1]. Valoarea așteptată din teorie a pantei dreptei $p = g(1 + \mu) = 9,94 \text{ m/s}^2$ se află în interiorul intervalului de încredere $9,9 \text{ m/s}^2 \leq p \leq 10,1 \text{ m/s}^2$ obținut în experiment. Toate aceste rezultate confirmă veridicitatea principiului fundamental al dinamicii mișcării de translație în experiență. Ca și în experiențele precedente rezultatele au fost obținute cu un nivel de încredere de 68,3%, eroarea absolută a pantei dreptei reprezentând eroarea standard.

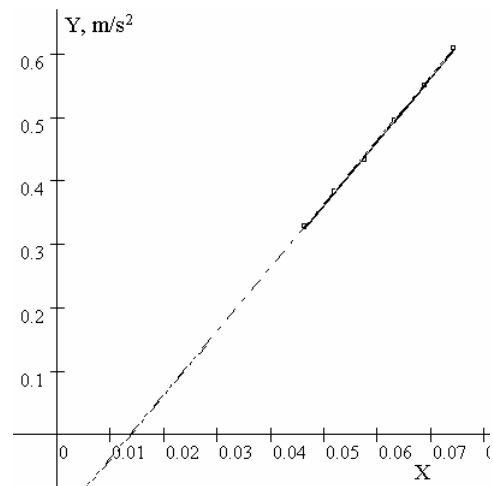


Fig. 9

BIBLIOGRAFIE

1. Alexandru Rusu. Trusa de mecanică asistată de calculator. Verificarea experimentală a principiului fundamental al dinamicii mișcării de translație la deplasarea unui cărucior pe planul înclinat. Fizica și tehnologii moderne. V9, Nr. 1-2, 2011.
2. A. Rusu. Trusa de mecanică asistată de calculator. Verificarea formulei vitezei la mișcarea rectilinie uniform variată. Fizica și tehnologii moderne. V7, Nr. 3-4 (24-25), 2009.
3. A. Rusu, C. Pîrțac, S. Rusu. Trusa de mecanică asistată de calculator. Procesarea datelor. Fizica și tehnologii moderne. V 6, Nr. 3-4 (23-24), 2008, p. 10-21.

Primit la redacție: 13 decembrie 2011