

TRUSA DE MECANICĂ ASISTATĂ DE CALCULATOR.

V. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A FORMULEI LUI GALILEO

Alexandru RUSU
Universitatea Tehnică a Moldovei
preuniversitas@gmail.com

Rezumat: *Se analizează posibilitățile verificării experimentale a formulei lui Galileo în mișcarea uniform accelerată fără și cu viteză inițială, precum și în mișcarea uniform încetinită. Se argumentează aproximarea vitezei instantanee în mijlocul unui interval mic de timp cu viteza mobilului în mijlocul distanței parcurse, prezentându-se condițiile în care aproximația este valabilă. Se dau exemple de utilizare a softului elaborat pentru obținerea și procesarea datelor, precum și pentru pregătirea referatelor atât în cazul mișcării mobilului pe planul înclinat, cât și în cazul căderii libere. Sunt analizate concluziile ce se desprind din aceste experiențe. Pentru elevii interesați se propun 5 experiențe cu caracter de cercetare.*

Există situații practice când nu se cunoaște timpul mișcării mobilului, dar se cunosc vitezele lui v_0 și v la capetele unui segment rectiliniu de lungimea S parcurs uniform accelerat sau încetinit. În acest caz poate fi utilizată formula lui Galileo:

$$v^2 - v_0^2 = 2aS, \quad (1)$$

în care a este accelerația mobilului. Formula (1) se obține înlocuind timpul mișcării exprimat din relația de definiție a accelerației $t = (v - v_0)/a$ în formula distanței parcurse $S = v_0t + at^2/2$. În cazul mișcării rectilinii uniform încetinite ($a < 0$) formula lui Galileo capătă forma

$$v_0^2 - v^2 = 2|a|S, \quad (2)$$

iar în cazul când $v_0 = 0$ avem

$$v^2 = 2aS. \quad (3)$$

Pentru a verifica experimental veridicitatea relației (3) trebuie să măsurăm viteza instantanee v a mobilului la capătul distanței parcurse S , precum și această distanță (fig. 1). Viteza medie a unui mobil în mișcare rectilinie uniform accelerată pe distanța d egală cu grosimea obturatorului coincide cu viteza instantanee v în mijlocul intervalului de timp t_1 , în care obturatorul căruciorului acoperă fasciculul sensorului:

$$v = d/t_1 = v'_0 + at_1/2, \quad (4)$$

unde v'_0 este viteza mobilului în momentul când obturatorul începe să acopere fasciculul sensorului. Pentru a putea măsura distanța S parcursă în experiment vom aproxima

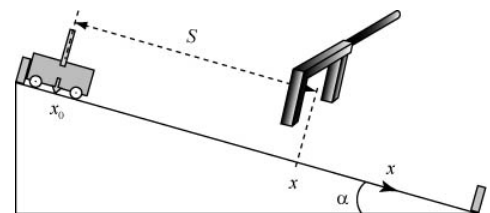


Fig. 1

viteza instantanee v în mijlocul intervalului de timp t_1 cu viteza v_M în mijlocul distanței parcurse d :

$$v_M^2 - v_0^2 = ad. \quad (5)$$

În acest caz eroarea relativă va fi

$$\varepsilon_M = |v - v_M|/v = |1 - v_M/v|. \quad (6)$$

Substituind viteza v_0' determinată din (4) în relația (5), obținem:

$$\varepsilon_M = \left| 1 - \sqrt{1 + a^2 t_1^4 / (4d^2)} \right|. \quad (7)$$

De aici rezultă că aproximația $v \approx v_M$ poate fi utilizată dacă $a^2 t_1^4 / (4d^2) \ll 1$ sau dacă

$$t_1 \ll \sqrt{2d/a}. \quad (8)$$

Dacă, de exemplu, $d = 0,005$ m și $a = 2 \text{ m/s}^2$, atunci se obține $t_1 \ll 0,0707$ s. Experiența arată că la mișcarea căruciorului pe planul înclinat cu accelerația $a = 2 \text{ m/s}^2$, parcurgând distanțe S cuprinse între 0,15 m și 0,35 m, obturatorul acestuia de grosimea $d = 0,005$ m întretaie fasciculul senzorului în intervale de timp t_1 cuprinse între 0,0065 s și, respectiv, 0,0042 s. Substituind aceste valori în (7) obținem erori relative cuprinse între $\varepsilon_{M1} \approx 0,00004$ (adică $\varepsilon_{M1} \approx 0,004\%$) și $\varepsilon_{M2} \approx 0,000006$ ($\varepsilon_{M2} \approx 0,0006\%$). Astfel, această eroare care intervine ca o eroare sistematică de metodă, pentru un obturator cu diametrul $d = 0,005$ m este întotdeauna mult mai mică decât erorile aleatorii ale experimentului. De exemplu, dacă considerăm eroarea absolută (aleatorie) comisă la măsurarea timpului $\Delta t_1 \approx 0,0001$ s, atunci pentru valorile de mai sus ale intervalului de timp t_1 obținem erori relative (aleatorii) cuprinse între 1,54 % și 2,38 %. De aici rezultă că în pofida faptului că obturatorul cu diametrul de 5 mm generează o eroare sistematică de metodă foarte mică, obturatoarele cu diametrul de 10 mm și 15 mm totuși sunt mai indicate, întrucât pentru acestea erorile aleatorii sunt mai mici, iar eroarea sistematică de metodă, deși crește, rămâne încă acceptabil de mică.

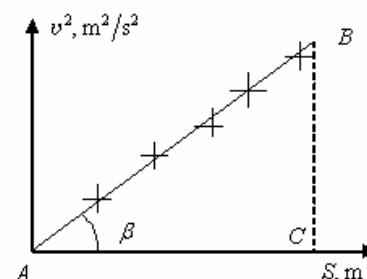


Fig. 2

La măsurarea distanței S trebuie să se țină seama atât de coordonata x_0 a căruciorului în poziția inițială, cât și de grosimea obturatorului d . Astfel, dacă la apropierea obturatorului (în mișcarea pe plan de sus în jos) de fasciculul senzorului cronometrul reacționează atunci când indicatorul căruciorului se află la coordonata x (fig. 1), atunci distanța parcursă de mobil va fi

$$S = x + d/2 - x_0. \quad (9)$$

Substituind (4) și (9) în (3), obținem următoarea relație echivalentă cu relația (3) și exprimată prin mărimi direct măsurabile:

$$(d/t_1)^2 = 2a(x + d/2 - x_0). \quad (10)$$

Această relație poate fi considerată drept o funcție liniară de tipul

$$(11)$$

unde $Y = (v/t_1)^2$, $X = x + d/2 - x_0$ și $p = 2a$. Luând $n \geq 5$ poziții ale senzorului și pentru fiecare poziție câte $N \geq 10$ măsurări ale intervalului t_1 de acoperire a fasciculului, putem trasa graficul dependenței (10) a pătratului vitezei mobilului $Y = v^2 = (d/t_1)^2$ de distanța parcursă $X = S = x + d/2 - x_0$ (fig. 2). Dacă graficul va reprezenta un segment de dreaptă vom putea trage concluzia că formula lui Galileo (3) este justă în limitele unor anumite erori. Accelerația mobilului este

$$a = p/2, \tag{12}$$

unde panta dreptei (10) se poate calcula utilizând metoda celor mai mici pătrate [1] sau direct din grafic (fig. 2): $p = BC/AC$, dacă acesta se trasează manual. Din (10) rezultă că dreapta $Y = pX + b$ trebuie să treacă prin origine, adică $b = 0$. Vom considera, totuși, $b \neq 0$ pentru a putea estima eroarea absolută Δb la determinarea acestei mărimi. Astfel, dacă calculele vor arăta că $\Delta b \geq b$, atunci vom putea trage concluzia că dreapta (10), în limitele erorilor experimentale, trece prin origine așa cum o cere această dependența teoretică. Eroarea aleatorie în experiența de determinare a accelerației, după cum se vede din (12), este

$$\Delta a = \Delta p. \tag{13}$$

Dacă la efectuarea experienței se utilizează softul pentru achiziționarea și procesarea datelor, atunci mărimile p, a, b și $\Delta p, \Delta a, \Delta b$ se vor calcula urmând metoda celor mai mici pătrate [1] și utilizând, de asemenea, formulele (12) și (13).

Experiența poate fi efectuată în mai multe variante folosind obturatoare de diferite diametre și variind unghiul de înclinare a planului față de orizontală.

În fig. 3 este reprezentat graficul dependenței (10) trasat la calculator cu utilizarea softului elaborat pentru verificarea ei după 7 puncte experimentale obținute ca rezultat al efectuării a $n = 7$ serii a câte $N = 18$ măsurări ale intervalului de timp t_1 . În experiență s-a utilizat obturatorul cu diametrul $d = 5$ mm. Trecerea de la o serie de măsurări la alta s-a realizat prin îndepărtarea treptată a senzorului de punctul de pornire a căruciorului. După cum se vede din fig. 3, graficul dependenței (10) reprezintă un segment de dreaptă, fapt ce confirmă veridicitatea formulei lui Galileo (3). Accelerația mobilului $a = (2,15 \pm 0,02) \text{ m/s}^2$. Ea a fost determinată cu o eroare relativă ce nu depășește valoarea de 0,8% cu un nivel de încredere de 68,3%. Se observă că

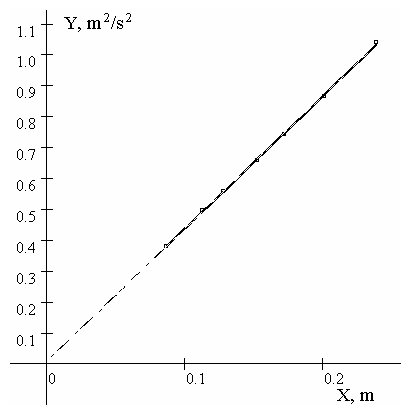


Fig. 3

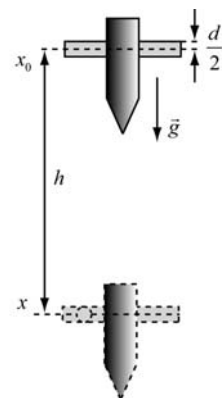


Fig. 4

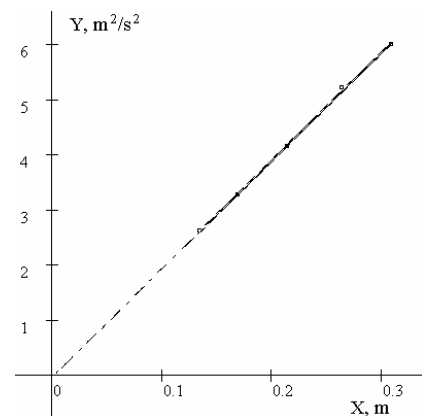


Fig. 5

$\Delta b \approx 0,006 \text{ m}^2/\text{s}^2 \approx b \approx 0,006 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Aceasta înseamnă că dreapta obținută în limitele erorilor experimentului trece prin originea de coordonate după cum o cere dependența teoretică. În cazul dacă se cere un nivel de încredere de 99,7%, atunci $\Delta b \approx 0,018 \text{ m}^2/\text{s}^2$ și $\Delta b > b$ și putem trage concluzia că dreapta cu certitudine trece prin origine. Formula lui Galileo (3) poate fi verificată și în cazul căderii libere. În acest caz se folosește un corp cilindric cu vârf conic (fig. 4) cu obturator plan de lățimea $d = 10 \text{ mm}$. Sensorul se situează pe unul din suporturile verticale ale stativului, astfel încât la cădere obturatorul plan al corpului cilindric să întretaie fasciculul acestuia (fig. 4). În fig. 5 este reprezentat graficul dependenței (10) trasat în urma procesării la calculator a datelor obținute la cronometrul electronic în 5 serii a câte 10 măsurări a intervalului de timp t_1 în care obturatorul plan al cilindrului cu vârf conic a întretăiat fasciculul sensorului situat la distanța $h = x - x_0$ (fig. 4) de punctul de pornire. La trecerea de la o serie de măsurări la alta sensorul a fost îndepărtat treptat de punctul de pornire a corpului, astfel asigurându-se variația distanței h . Se observă că graficul reprezintă un segment de dreaptă, fapt ce confirmă veridicitatea formulei lui Galileo $v^2 = 2gh$ aplicate la căderea liberă. Accelerația gravitațională a fost determinată cu o eroare relativă de 1,2%, obținându-se valoarea $g = (9,8 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$ cu un nivel de încredere de 68,3%. Valoarea așteptată $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ se află în interiorul intervalului de încredere obținut în experiment. Pentru termenul liber și eroarea acestuia s-au obținut valorile: $|b| = 0,034 \text{ m}^2/\text{s}^2$ și $\Delta b = 0,054 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Se observă că $\Delta b > |b|$. Aceasta înseamnă că în limitele erorilor experimentului dreapta obținută trece prin originea de coordonate așa cum o cere formula teoretică.

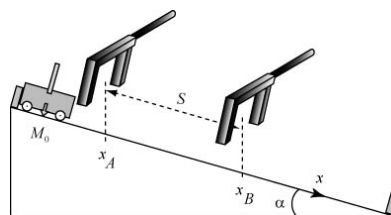


Fig. 6

Poate fi verificată experimental și formula lui Galileo pentru mișcarea uniform accelerată cu viteză inițială (1). În acest caz vom aproxima viteza instantanee v în mijlocul unui mic segment de lungimea d a traiectoriei rectilinii a mobilului cu viteza medie pe această distanță astfel încât în limitele erorilor experimentale aceste viteze să coincidă [2]. Astfel, $v^2 - v_0^2 = (d/t_3)^2 - (d/t_1)^2$, unde t_1 și t_3 sunt intervalele de timp în care obturatorul căruciorului în mișcare acoperă fasciculele senzorilor A și, respectiv, B (fig. 6). Diametrul obturatorului nu trebuie să întrecă valorile S_{\max} sau d_{\max} determinate în experiențele din [2]. Totuși, grosimea obturatorului nu trebuie luată prea mică, întrucât în acest caz intervalele de timp măsurate vor fi mici, iar aceasta va duce la creșterea erorilor aleatorii. De exemplu, dacă intervalul de timp măsurat va fi $t_1 = 0,0035 \text{ s}$, atunci, ținând seama de eroarea cronometrului $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$, obținem eroarea relativă $\varepsilon \approx 3\%$. Distanța S parcursă de cărucior pe planul înclinat în mișcarea sa uniform accelerată se determină ca diferența coordonatelor senzorilor A și B : $S = x_B - x_A$ (fig. 6). Fiecare coordonată se determină apropiind încet obturatorul căruciorului de fasciculul sensorului respectiv și observând cu ajutorul indicatorului acestuia pe rigla planului poziția când cronometrul începe măsurarea primului interval de timp. Astfel relația (1) exprimată prin mărimi direct măsurabile ia forma

$$(d/t_3)^2 - (d/t_1)^2 = 2a(x_B - x_A). \quad (14)$$

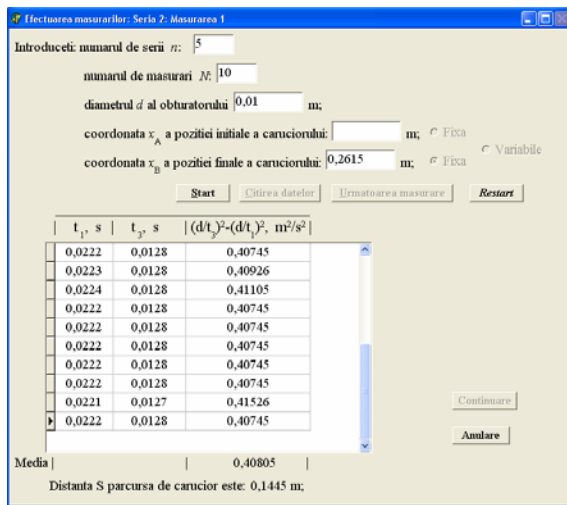


Fig. 7

determinării ei se vor calcula cu formulele (12) și, respectiv, (13).

În *fig. 7* este reprezentată fereastra „Efectuarea măsurărilor” din softul elaborat pentru verificarea experimentală a relației (14). Înaintea începerii măsurărilor intervalelor de timp t_1 și t_2 se vor introduce numărul de serii $n \geq 5$, numărul de măsurări $N \geq 10$ din cadrul fiecărei serii, diametrul obturatorului fixat pe cărucior, precum și coordonatele pozițiilor inițială x_A și finală x_B ale căruciorului. Experiența poate fi efectuată menținând fixă poziția unuia din senzori și modificând poziția celuilalt sau modificând pozițiile ambilor senzori la trecerea de la o serie de măsurări la alta. Aceste variante ale experienței sunt prevăzute și în soft, realizându-se prin bifarea uneia din aceste variante. De exemplu, bifarea poziției „Fixă” la senzorul B înseamnă că pe parcursul experienței poziția acestui senzor se va menține fixă, iar poziția senzorului A va fi modificată la trecerea de la o serie de măsurări la alta. După ce se dă „Start” măsurărilor, la fiecare repetare intervalele de timp t_1 și t_2 de la cronometrul electronic vor fi trecute în tabel (*fig. 7*) și totodată va fi calculată mărimea $Y = (d/t_2)^2 - (d/t_1)^2$. După accesarea butonului „Citirea datelor” de la ultima repetare și accesarea butonului „Următoarea măsurare” valoarea coordonatei x_A va dispărea (*fig. 7*), cerându-se modificarea poziției senzorului A și valoarea nouă a coordonatei acestuia pentru a începe seria următoare de măsurări.

În *fig. 8* este reprezentat graficul dependenței (14) trasat la calculator după procesarea cu metoda celor mai mici pătrate a intervalelor de timp t_1 și t_2 obținute în urma efectuării a 5 serii a câte 10 măsurări. Aici s-a folosit obturatorul cu diametrul $d = 10$ mm și la trecerea de la o serie de măsurări la alta senzorii A și B au fost îndepărtați treptat unul de altul. Graficul dependenței (14) reprezintă un

Ea poate fi considerată drept o funcție liniară de tipul (11), unde $Y = (d/t_2)^2 - (d/t_1)^2$, $X = x_B - x_A$ și panta $p = 2a$, ca în cazul verificării formulei (3). Și în cazul relației (14) vom considera $b \neq 0$ pentru a putea compara valoarea acestui termen cu eroarea Δb . Luând $n \geq 5$ poziții ale senzorilor și pentru fiecare poziție câte $N \geq 10$ măsurări ale intervalelor de timp t_1 și t_2 de acoperire a fasciculelor, se poate trasa graficul dependenței (14). Dacă acest grafic va reprezenta un segment de dreaptă și $\Delta b \geq b$, atunci vom putea trage concluzia că formula lui Galileo (1) este justă în limitele unor anumite erori. La fel ca în experiența precedentă, accelerația mobilului și eroarea

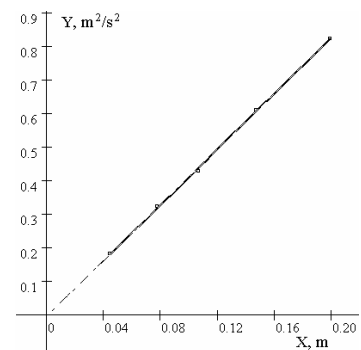


Fig. 8

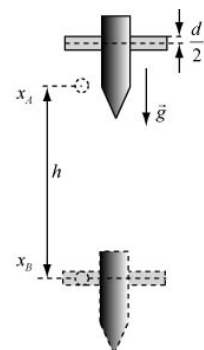


Fig. 9

segment de dreaptă, fapt ce confirmă veridicitatea formulei lui Galileo (1). Valoarea obținută pentru accelerația mobilului $a = (2,07 \pm 0,02) \text{ m/s}^2$ practic coincide cu valoarea $a = (2,05 \pm 0,01) \text{ m/s}^2$ obținută cu același obturator și menținând fix senzorul A . Ea coincide, de asemenea, cu valoarea $a = (2,08 \pm 0,03) \text{ m/s}^2$ obținută folosind obturatorul de 5 mm și menținând fix senzorul A la trecerea de la o serie de măsurări la alta. Termenul liber și eroarea absolută de determinare a lui sunt: $b \approx 0,004 \text{ m/s}^2$, $\Delta b \approx 0,006 \text{ m/s}^2$. Se observă că $\Delta b > b$, ceea ce înseamnă că în limitele erorilor experimentale dreapta obținută trece prin originea de coordonate așa cum o cere formula teoretică (14). Aceste rezultate au fost obținute cu nivelul de încredere de 68,3%.

Relația (14) poate fi verificată și în cazul căderii libere, folosindu-se pentru măsurări cilindru cu vârf conic și obturator (fig. 9). În acest caz senzorul A se plasează puțin mai jos de punctul de pornire a corpului. Fereastra „Efectuarea măsurărilor” este analogă celei din fig. 7. În fig. 10 este reprezentat graficul trasat cu aplicarea softului elaborat pentru această experiență. Intervalele de timp t_1 și t_3 au fost obținute de la cronometrul electronic, păstrând fixă poziția senzorului A și îndepărtând treptat senzorul B în 5 serii a câte 10 măsurări. Graficul dependenței (14) reprezintă un segment de dreaptă, fapt ce confirmă veridicitatea formulei lui Galileo (1) pentru căderea liberă cu viteză inițială. Pentru accelerația gravitațională a fost obținută valoarea $g = (9,83 \pm 0,06) \text{ m/s}^2$. Ea a fost determinată cu eroarea relativă de 0,6 % și nivelul de confidență de 68,3%. Se observă că valoarea așteptată $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ se află în interiorul intervalului de încredere obținut în experiment. Pentru termenul liber și eroarea de determinare a acestuia s-au obținut valorile: $\Delta b \approx b \approx 0,02 \text{ m}^2/\text{s}^2$, ceea ce înseamnă că în limitele erorilor experimentale dreapta obținută trece prin originea de coordonate, după cum o cere formula teoretică. Pentru un nivel mai înalt de încredere, de exemplu, de 99,7% $\Delta b \approx 0,06 \text{ m}^2/\text{s}^2 > b$.

Pentru a verifica formula lui Galileo (2) în mișcarea uniform încetinită, efectuând $n \geq 5$ serii a câte $N \geq 10$ măsurări trebuie să avem posibilitatea de a repeta de mai multe ori, în aceleași condiții, fiecare măsurare din fiecare serie. Această posibilitate se asigură la fel ca la verificarea formulei distanței parcurse în mișcarea uniform încetinită [3]. Vom pune cronometrul în regimul $n-7$ de măsurare a 7 intervale consecutive de timp, întrucât căruciorul va fi eliberat de fiecare dată din vârful planului înclinat. Primele 6 intervale coincid cu intervalele măsurate la verificarea formulei distanței parcurse în mișcarea uniform încetinită [3]. Se folosesc, însă, doar intervalele de timp t_5 și t_7 în care obturatorul de diametrul d al căruciorului în mișcare uniform încetinită în sus pe planul înclinat acoperă fasciculele senzorilor B și, respectiv, A (fig. 6). Ca și în experiența precedentă, vom aproxima viteza instantanee v în mijlocul unui mic segment de lungime d a traiectoriei rectilinii a mobilului cu viteza medie pe această distanță astfel încât aceste viteze să coincidă, în limitele erorilor experimentale [2]. Această aproximație este valabilă dacă diametrul obturatorului nu depășește valorile S_{\max} sau d_{\max} determinate în experiențele analizate în [2].

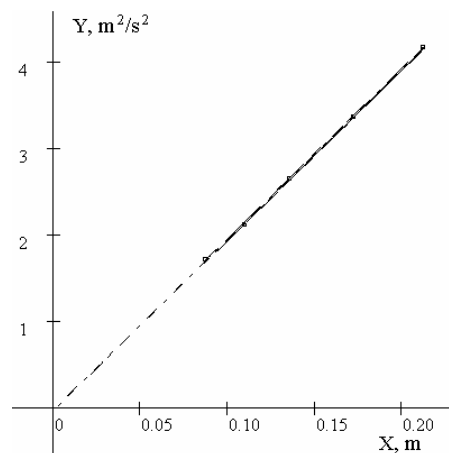


Fig. 10

Astfel, $v_0^2 - v^2 = (d/t_5)^2 - (d/t_7)^2$. Distanța S parcursă de cărucior pe planul înclinat în mișcarea lui uniform încetinită se determină ca diferența coordonatelor senzorilor B și A : $S = x_B - x_A$ (fig. 6). Astfel relația (2) exprimată prin mărimi direct măsurabile devine

$$(d/t_5)^2 - (d/t_7)^2 = 2|a|(x_B - x_A). \quad (15)$$

Ea poate fi considerată drept o funcție liniară de tipul (11), unde $Y = (d/t_5)^2 - (d/t_7)^2$, $X = x_B - x_A$, panta $p = 2|a|$, considerându-se $b \neq 0$ din aceleași considerente ca în experiența precedentă. Fereastra „Efectuarea măsurărilor” din softul pentru această experiență este analogă cu cea din experiența precedentă (fig. 7). Și în acest caz la trecerea de la o serie de măsurări la alta poziția unuia din senzori poate fi păstrată fixă, iar poziția celuilalt modificată sau pot fi modificate pozițiile ambilor senzori. Formula lui Galileo (2) se va considera verificată dacă graficul dependenței (15) va reprezenta un segment de dreaptă ce trece prin originea de coordonate ($\Delta b \geq b$).

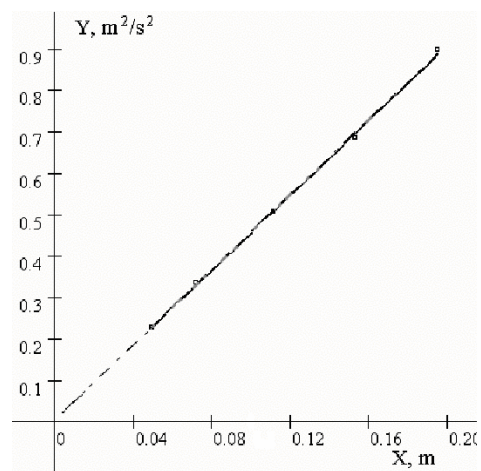


Fig. 11

În fig. 11 este reprezentat graficul dependenței (15) trasat la calculator în urma procesării a 5 serii a câte 10 măsurări a intervalelor de timp t_5 și t_7 folosind obturatorul cu diametrul

de 5 mm și îndepărtând treptat senzorii unul de altul la trecerea de la o serie de măsurări la alta. Se observă că graficul acestei dependențe reprezintă un segment de dreaptă ceea ce confirmă veridicitatea formulei lui Galileo (2) pentru mișcarea rectilinie uniform încetinită. Accelerația mobilului este $a = (2,26 \pm 0,08) \text{ m/s}^2$ și a fost determinată cu o eroare relativă de 1,8 % , avându-se în vedere un nivel de încredere de 68,3%. Valorile pentru termenul liber și eroarea determinării lui sunt $\Delta b \approx 0,01 \text{ m/s}^2 > b \approx 0,004 \text{ m/s}^2$. Aceasta înseamnă că în limitele erorilor experimentale dreapta trece prin originea de coordonate, așa cum o cere dependența teoretică.

REFERINȚE

1. A. Rusu, C. Pîrțac, S. Rusu. Trusa de mecanică asistată de calculator. Procesarea datelor. Fizica și tehnologiile moderne. Vol. 6, Nr. 3-4 (23-24), 2008, p. 10-21.
2. A. Rusu. Trusa de mecanică asistată de calculator. Determinarea vitezei instantanee a unui mobil în mișcarea rectilinie uniform variată. Fizica și tehnologiile moderne. Vol. 7, Nr. 1-2 (24-25), 2009.
3. Alexandru Rusu. Trusa de mecanică asistată de calculator. Verificarea experimentală a formulei distanței parcurse în mișcarea rectilinie uniform variată. Fizica și tehnologiile moderne. Vol. 8, Nr. 1-2, 2010.

Primit la redacție: 22 septembrie 2010