Cu privire la unele probleme referitoare la dreapa şi planul în spaţiu

Iurie Baltag

Universitatea Tehnică din Moldova
e-mail: iubaltag@mail.ru

Se examinează următoarele probleme:

1. **Poziţia reciprocă a două drepte în spaţiu.**
2. **Determinarea distanţei minime dintre două drepte şi a punctelor de pe ele ce asigură această distanţă.**
3. **Poziţia reciprocă a unei drepte şi a unui plan.**
4. **Determinarea punctului simetric în raport cu un plan sau cu o dreaptă.**
5. **Determinarea proecţiei unei drepte pe un plan.**

1. Fie daţi vectorii directori ai dreptelor şi câte un punct pe fiecare din dreptele (a) şi (b). Mai întâi verificăm, dacă vectorii daţi sunt colineari. În caz afirmativ dreptele sunt paralele. Dacă vectorii nu sunt colineari, atunci dreptele se intersectează sau sunt neconcurente.

Pentru a determina poziţia lor scriem ecuaţiile parametrice ale dreptelor şi egalăm părţile drepte ale ecuaţiilor variabilelor corespunzătoare. În rezultat obţinem un sistem ce conţine trei ecuaţii liniare cu două necunoscute t şi r.

Sunt posibile următoarele două cazuri:

1. *Sistemul dat are soluţie unică, atunci dreptele se intersectează şi determinăm punctul lor de intersecţie.*

2. *Sistemul este incompatibil, atunci dreptele sunt neconcurente.*

2. Fie date două drepte neconcurente. Punem problema să aflăm distanţa minimă dintre drepte şi a punctelor de pe ele ce asigură această distanţă. Cu acest scop, utilizând ecuaţiile parametrice ale dreptelor, alcătuim funcţia de două variabile $d(t, r)$ ce descrie distanţa dintre orice două puncte situate pe dreptele (a) şi (b).

Din considerente geometrice este clar, că această funcţie poate avea doar un singur punct de extrem şi anume un punct de minim. Pentru a-l afla aplicăm condiţia necesară de extrem ce se reduce la un un sistem cu 2 ecuaţii liniare şi 2 necunoscute. Rezolvând acest sistem, determinăm coordonatele punctului de minim (t_0, r_0) şi atunci $d(t_0, r_0)$ va fi distanţa minimă dintre drepte. Pentru a determina punctele de pe drepte ce asigură această distanţă înlocuim în ecuaţiile lor parametrice $t = t_0, r = r_0$.

Notă. Dacă dreptele sunt paralele, putem lua pe una din ele un punct fix şi atunci funcţia distanţei $d(\cdot, \cdot)$ va fi de o singură variabilă.

3. Fie dată ecuaţia generală a unui plan Π. Înlocuim ecuaţiile parametrice ale dreptei (a) în ecuaţia planului şi obţinem o ecuaţie de gradul 1 cu o necunoscută t.

Sunt posibile următoarele trei cazuri:

1. *Ecuaţia are soluţie unică $t = t_0$, atunci dreapta intersectează planul într-un punct. Pentru a afla coordonatele lui înlocuim această valoare a lui t în ecuaţiile parametrice ale dreptei.*

2. Ecuaţia nu are soluţii. Atunci dreapta este paralelă planului.

3. Ecuaţia are forma $0 \cdot t = 0$*, adică estre adevărată pentru orice* t*. În acest caz dreapta aparţine planului.*

4. Fie dată ecuaţia unui plan Π şi un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ în afara lui. Pentru a determina punctul lui simetric în raport cu planul dat alcătuim ecuaţiile parametrice ale dreptei (a) ce trece prin punctul M_1 perpendicular pe plan şi aflăm punctul de intersecţie al acestei drepte cu planul.

Procedând ca în cazul 3), aflăm punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de intersecţie al dreptei (a) cu planul. Apoi aplicăm formulele mijlocului unui segment şi determinăm punctul M_2 simetric lui în raport cu planul dat.

Dacă trebuie să aflăm punctul simetric lui M_1 în raport cu o dreaptă (b) ce are ecuaţiile parametrice date, atunci alcătuim ecuaţia planului ce trece prin M_1 perpendicular pe (b) şi aflăm punctul de intersecţie al acestui plan cu dreapta dată. Apoi, aplicând formulele mijlocului unui segment, la fel ca şi în cazul precedent aflăm punctul căutat.

5. Fie dată ecuaţia unui plan Π şi o dreaptă (a) cu vectorul director dat ce trece prin punctul A. Pentru a determina ecuaţiile dreptei ce reprezintă proecţia dreptei (a) pe plan, deducem mai întâi ecuaţia planului $\Pi_1 \perp \Pi$ ce trece prin dreapta (a). Cu acest scop aflăm vectorul normal al acestui plan, calculând produsul vectorial dintre vectorul director al dreptei (a) şi vectorul normal al planului şi alcătuim ecuaţia planului căutat aplicând formula ecuaţiei planului ce trece prin punctul $A(x_1, y_1, z_1)$ cu vectorul normal $\boldsymbol{n}_1$.

Intersecţia celor două plane va fi dreapta ce reprezenta proiecţia dreptei (a) pe planul Π, adică sistemul ce conţine ecuaţiile celor două plane.

Bibliography

[1] Năstăsescu C., Niţă C., Stănescu I., *Elemente de algebră superioară*, Bucureşti, 1993.

[2] Baltag I., Baltag Iu., *Elemente de algebră liniară şi geometrie analitică*, Chişinău, 2008.

[3] Baltag Iu., *Elemente de algebră liniară şi vectorială*, Chişinău, 2008.

[4] Chletenic D., *Culegere de probleme la geometria analitică*, Moscova,1976.