CALCULAREA LIMITELOR

Dumitru Botnaru, Catedra algebră, geometrie și topologie, UST

Alina Țurcanu, Universitatea Tehnică din Moldova

Rezumat. În lucrare sunt studiate o serie de exemple de calculare a limitelor, fiind folosite anumite procedee.

Abstract. A series of examples of limit calculation are studied in the paper, using some methods.

Calcularea limitei unei funcții continue nu prezintă nici o dificultate, deoarece $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ pentru un punct de continuitate a a funcției f.

Notă. Fie $f(x) = \propto x$, iar $g(x) = x$. Atunci $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\propto x}{x}$ exprimă o nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$. Simplificând expresia $\frac{\propto x}{x}$ prin x, deoarece x tinde către 0, însă este diferit de 0, obținem că limita dată este egală cu $\propto$. Dând valori numerice lui $\propto$, observăm că una și aceeași nedeterminare (în cazul de față de tipul $\frac{0}{0}$) ne conduce la diferite răspunsuri. Prin urmare, în asemenea cazuri, răspunsul nu este determinat de la bun început și el trebuie calculat de fiecare dată ridicând nedeterminarea.

La dezvoltarea nedeterminărilor deseori se primește, că unele nedeterminări să treacă în altele și asta de câteva ori.

Cazuri de nedeterminări: $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, ∞^∞.

Următoarele cazuri se consideră definite:

5. $\frac{0}{a} = 0, a \neq 0$. 2. $\frac{a}{\infty} = 0, a \neq \infty$. 3. $\infty \cdot \infty = \infty$. 4. $a \cdot \infty = \infty, a \neq 0$.

5. $\infty + a = \infty, a \neq -\infty$. 6. $\infty^{\propto} = \begin{cases} \infty, pentru \ \propto > 0, \\ 0, pentru \ \propto < 0. \end{cases}$

7. $a^{+\infty} = \begin{cases} \infty, pentru \ \propto > 1, \\ 0, pentru \ 0 < \propto < 1. \end{cases}$ 7. $a^{-\infty} = \begin{cases} 0, pentru \ \propto > 1, \\ \infty, pentru \ 0 < \propto < 1. \end{cases}$

Dacă, calculând limita funcției f în punctul a obținem una din primele patru nedeterminări, atunci substituim, dacă e posibil, funcția f cu o funcție g continuă în punctul a, astfel încât, pentru orice număr $x \neq a$ să aibă loc $f(x) = g(x)$ și atunci

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Exemplu. Funcția $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ este identic egală cu funcția $g(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$, pentru $x \neq 1$.

Nedeterminări de tipul $\frac{\infty}{\infty}$ (funcții raționale și iraționale).

Fie $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Atunci:

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) =$$
$$= \lim_{x \to \pm\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = \pm\infty \cdot a_n = \pm\infty$$

Semnul răspunsului depinde de semnul coeficientului a_n, paritatea lui n și de faptul dacă $x \to +\infty$ sau $x \to -\infty$.

Fie $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,
$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.

In acest caz $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ este o nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$, pe care ușor o ridicăm împărțind P_n și Q_m la x^n sau x^m. Se observă că

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & pentru\ n = m, \\ 0, & pentru\ n < m, \\ \infty, & pentru\ n > m. \end{cases}$$

Pentru funcții iraționale putem utiliza următoarele echivalențe:

$$\sqrt[m]{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \sim \sqrt[m]{a_n}\, x^{\frac{n}{m}}, \quad pentru\ x \to +\infty.$$

$$\sqrt[2]{6x^4 + 2x^3 + 5} \sim \sqrt{6}\, x^2, \text{ pentru } x \to -\infty.$$

$$\sqrt[4]{2x^4 + 2x^2 + 3} \sim -\sqrt[4]{2}\, x, \text{ pentru } x \to -\infty.$$

Exemple. Să se calculeze limitele date:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^4+2x^3-4}{6x^4-5x^2-3x} = \left(\frac{\infty}{\infty}, x^4\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^4}}{6-\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}} = \frac{5}{6}$.

Răspuns: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x^4+2x^3-4}{6x^4-5x^2-3x} = \frac{5}{6}$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^3+8x^2-3x+4}{-\sqrt{9x^6+4x^2+7}} = \left(\frac{\infty}{\infty}, x^3,\ deoarece\ x \to -\infty, considerăm\ că\ x^3 = -\sqrt{x^6}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\sqrt{9+\frac{4}{x^4}+\frac{7}{x^6}}} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$.

Răspuns $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{7x^3+8x^2-3x+4}{-\sqrt{9x^6+4x^2+7}} = -2\frac{1}{3}$.

Nedeterminări de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ *(funcții raționale).*

Fie $P(x)$ și $Q(x)$ două polinoame pentru care $P(a) = Q(a) = 0$. Pentru a calcula $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, ce reprezintă o nedeterminare de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, apelăm la teorema Bèzout, descompunând polinoamele astfel: $P(x) = (x-a)P_1(x)$ și $Q(x) = (x-a)Q_1(x)$, unde P_1 și Q_1 sunt de asemenea polinoame care pot fi aflate sau prin împărțirea în coloană a polinoamelor P și Q la $(x-a)$ sau cu ajutorul schemei lui Horner. Dacă polinoamele P și Q sunt de gradul doi (ambele sau unul dintre ele), atunci descompunerea poate fi efectuată în baza formulei descompunerii trinomului pătrat în factori liniari:
$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Deseori factorul $(x-a)$ poate fi separat la numărător și numitor prin gruparea termenilor. Deci

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Exemple. 1. Să se calculeze limita:

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^3+7x^2+12}{6x^2+5x-14}.$$

Rezolvare. O nedeterminare de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$. Aplicăm schema lui Horner pentru separarea factorului liniar $(x+2)$ atât la numărător, cât și la numitor.

	3	7	8	12
-2	3	1	6	0

$$3x^3 + 7x^2 + 12 = (x+2)(3x^2 + x + 6)$$

	6	5	-14
-2	6	-7	0

$$6x^2 + 5x - 14 = (x+2)(6x-7).$$

Astfel $\lim_{x \to -2} \frac{3x^3+7x^2+12}{6x^2+5x-14} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(3x^2+x+6)}{(x+2)(6x-7)} = \lim_{x \to -2} \frac{(3x^2+x+6)}{(6x-7)} = -\frac{16}{19}.$

Răspuns: $\lim_{x \to -2} \frac{3x^3+7x^2+12}{6x^2+5x-14} = -\frac{16}{19}.$

2. $\lim_{x \to 27} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}.$

Rezolvare. Este o nedeterminare de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$.

$$\lim_{x \to 27} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} = \lim_{x \to 27} \frac{(\sqrt[3]{x})^3-27}{\sqrt[3]{x}-3} = \lim_{x \to 27} \frac{(\sqrt[3]{x}-3)((\sqrt[3]{x})^2-3\sqrt[3]{x}+9)}{\sqrt[3]{x}-3} =$$

$$= \lim_{x \to 27} ((\sqrt[3]{x})^2 - 3\sqrt[3]{x} + 9) = 9+9+9 = 27.$$

Răspuns: $\lim_{x \to 27} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} = 27.$

Nedeterminări de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ *(funcții iraționale).*

Fie $p(a) = 0,\ f(a) = g(a) > 0,\ u(a) = v(a) > 0,$ unde p, f, g, u și v sunt polinoame. Atunci $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{p(x)(\sqrt{u(x)}-\sqrt{v(x)})}$ este o nedeterminare de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ (polinomul p poate figura atât la numărător, cât și la numitor). Pentru a calcula această limită, înmulțim atât numărătorul, cât și numitorul cu produsul conjugatelor expresiilor iraționale de la numărător și numitor: $(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}) \cdot (\sqrt{u(x)} + \sqrt{v(x)})$. Expresiile obținute sunt identic egale, prin urmare vor fi identic egale și limitele lor:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}{p(x)\left(\sqrt{u(x)}-\sqrt{v(x)}\right)} = \lim_{x \to a} \frac{\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{u(x)}+\sqrt{v(x)}\right)}{p(x)\left(\sqrt{u(x)}-\sqrt{v(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{u(x)}+\sqrt{v(x)}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{p(x)(u(x)-v(x))} \cdot \frac{\sqrt{u(x)}+\sqrt{v(x)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}} = \frac{\sqrt{u(a)}+\sqrt{v(a)}}{\sqrt{f(a)}+\sqrt{g(a)}} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{p(x)(u(x)-v(x))}.$$

În rezultat problema s-a redus la ridicarea unei nedeterminări de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ – funcție rațională.

Expresii conjugate:

- $S=\sqrt[n]{x^p\cdot y^q\cdot\ldots\cdot z^l}$, $K=\sqrt[n]{x^{n-p}\cdot yn-^q\cdot\ldots\cdot z^{n-l}}$, $SK=x\cdot y\cdot\ldots\cdot z.$
- $S=\sqrt{x}+\sqrt{y},$ $K=\sqrt{x}-\sqrt{y},$ $SK=x-y.$
- $S=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y},$ $K=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2},$ $SK=x+y.$
- $S=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y},$ $K=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2},$ $SK=x-y.$

Exemple. 1.Să se calculeze limita:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+3}-3}.$$

Rezolvare. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+3}-3}$ = (nedeterminare de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, înmulțim atât numărătorul și numitorul cu conjugata numărătorului și numitorului: $(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{2x+3}+3)$) = $=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{2x+3}+3)}{(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{2x+3}+3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1-4}{2x+3-9}\cdot\lim\limits_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x+3}-3)}{(\sqrt{x+1}+2)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{2(x-3)}\cdot\frac{6}{4}=\frac{3}{4}.$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+3}-3}=\frac{3}{4}.$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4}}{\sqrt{x+5}-3}.$

Rezolvare. Este o nedeterminare de tipul $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, multiplicăm atât numărătorul și numitorul cu conjugata numărătorului și numitorului: $(\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-4})(\sqrt{x+5}+3)$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4}}{\sqrt{x+5}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4})(\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-4})(\sqrt{x+5}+3).}{(\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-4})(\sqrt{x+5}+3).(\sqrt{x+5}-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{3x+4-(5x-4)}{x+5-9}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}+3}{(\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x-4})}=\frac{6}{8}\cdot\lim_{x\to 4}\frac{-2x+8}{x-4}=-\frac{3}{2}.$$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4}}{\sqrt{x+5}-3}=-\frac{3}{2}.$

Nedeterminări de tipul $\infty-\infty$.

Astfel de nedeterminări se dezvoltă cel mai des apelând la expresiile conjugate.

Exemple. Să se calculeze limitele:

1. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{9x^2-3x+4}+3x\right).$

Rezolvare. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{9x^2-3x+4}+3x\right)$ =(nedeterminare de tipul ∞-∞)

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(\sqrt{9x^2-3x+4}+3x)(\sqrt{9x^2-3x+4}-3x)}{\sqrt{9x^2-3x+4}-3x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{9x^2-3x+4-9x^2}{\sqrt{9x^2-3x+4}-3x}=$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-3x+4}{(\sqrt{9x^2-3x+4}-3x)}$ = (nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$, împărțim numitorul și numărătorul la x, ținând cont că $x=-\sqrt{x^2}$)= $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-3+\frac{4}{x}}{\left(\sqrt{9-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}-3\right)}=\frac{-3}{-3-3}=\frac{1}{2}.$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{9x^2-3x+4}+3x\right)=\frac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-x\right).$

Rezolvare. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-x\right)=$ (nedeterminare de tipul ∞-∞) =

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x-2}-x)(\sqrt{x^2+3x-2}+x)}{\sqrt{x^2+3x-2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-2-x^2}{\sqrt{x^2+3x-2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x-2}+x}=$

(nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$)= $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}=\frac{3}{2}.$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-x\right)=\frac{3}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2-3x+2}\right).$

Rezolvare. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2-3x+2}\right)$ =nedeterminare de tipul ∞-∞) =

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2-3x+2})(\sqrt{2x^2-3x+4}+\sqrt{2x^2-3x+2})}{\sqrt{2x^2-3x+4}+\sqrt{2x^2-3x+2}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(2x^2-3x+4)-(2x^2-3x+2)}{\sqrt{2x^2-3x+4}+\sqrt{2x^2-3x+2}}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{2x^2-3x+4}+\sqrt{2x^2-3x+2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Răspuns: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2-3x+2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Regula lui L'Hospital.

Fie $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$ și $\lim\limits_{x\to a}v(x)=0$ sau $\lim\limits_{x\to a}u(x)=\pm\infty$ și $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\pm\infty$, unde a este un număr sau $a=\pm\infty$ și fie că există limita $\lim\limits_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$. Atunci există și limita $\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$ și are loc egalitatea:

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Metoda logaritmării.

Unele nedeterminări de tipul 0^0, ∞^0, ∞^∞ și altele pot fi ridicate apelând la metoda logaritmării. Fie că $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ este o nedeterminare de tipul indicat. Notăm această limită cu *b* și logaritmăm ambii membri: $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=b,$

$\ln b=\ln\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=$ (deoarece funcția logaritmică este continue) =

$=\lim\limits_{x\to a}\ln[u(x)]^{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}v(x)\cdot\ln[u(x)]$ și în rezultat se obține o nedeterminare de tipul 0·∞.

Remarcă. Fie că $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b,$ iar $\lim\limits_{x\to a}v(x)=c$ și funcția u^v nu prezintă o nedeterminare în punctul a. Atunci $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=b^c.$

Exemple. Să se calculeze limitele:

1. $\lim\limits_{x \to 0}[tg\, x]^x$.

Rezolvare. Fie $\lim\limits_{x \to 0}(tg\, x)^x = a$. Atunci $\ln a = \lim\limits_{x \to 0}\ln(tg\, x)^x = \lim\limits_{x \to 0}x \cdot \ln(tg\, x)$ $= (tg\, x \sim x) = \lim\limits_{x \to 0}x \cdot \ln x = \lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = (\frac{0}{0}$, apelăm la regula lui L'Hospital) $= \lim\limits_{x \to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{1}{x} : \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\lim\limits_{x \to 0}x = 0.$ Deci $\ln a = 0$ sau $a = 1$.

Răspuns: $\lim\limits_{x \to 0}[tg\, x]^x = 1$.

2. $\lim\limits_{n \to \infty}\sqrt[n]{n}$.

Rezolvare. Fie $\lim\limits_{\mathrm{n} \to \infty}\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{n}} = \mathrm{a}$. Această limită reprezintă o nedeterminare de tipul ∞^0.

Avem $\ln a = \ln \lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty}\frac{\ln n}{n}$ = ($\frac{\infty}{\infty}$, trecem la variabila continue x) =

$= \lim\limits_{x \to +\infty}\frac{\ln x}{x}$ = ($\frac{\infty}{\infty}$, apelăm la regula lui L'Hospital) = $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x \to +\infty}\frac{1}{x} = 0,$

$\ln a = 0,\ a = 1.$

Răspuns: $\lim\limits_{n \to \infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

Echivalența funcțiilor.

Funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ se numesc echivalente în vecinătatea punctului a dacă $\lim\limits_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$. În acest caz în vecinătatea punctului a funcția $f(x)$ o aproximează pe $g(x)$ și viceversa.

La calcularea limitelor deseori apelăm la următoarele echivalențe ($\propto \in \mathbb{R}$, $x \to 0$):

1. $sin \propto x \sim \propto x \sim \propto x - \frac{\propto^3 x^3}{3!}$.
2. $tg \propto x \sim \propto x + \frac{\propto^3 x^3}{3!}$.
3. $arc\, sin \propto x \sim \propto x + \frac{\propto^3 x^3}{3!}$.
4. $arc\, tg \propto x \sim \propto x - \frac{\propto^3 x^3}{3!}$.
5. $cos \propto x \sim 1 - \frac{\propto^2 x^2}{2!}$.
6. 1- $cos \propto x \sim \frac{\propto^2 x^2}{2!}$.
7. $e^{\propto x} \sim 1 + \propto x$.
8. $a^{\propto x} \sim 1 + \propto \cdot \ln a \cdot x$.
9. $\ln(1 + \propto x) \sim \propto x$.
10. $log_a(1 + \propto x) \sim \frac{\propto x}{\ln a}$.

Prima limită remarcabilă: $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

A doua limită remarcabilă. Fie $\lim\limits_{x \to a}u(x) = 1,\ \lim\limits_{x \to a}v(x) = \pm\infty$, unde a este un număr sau $a = \pm\infty$. Atunci $\lim\limits_{x \to a}[u(x)]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a}(u(x)-1)\cdot v(x)}$.

Exemple. Să se calculeze limitele:

1. $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 3)^{\frac{2x+1}{x-2}}$.

Rezolvare. $\lim_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{2x+1}{x-2}}$ =(nedeterminare de tipul 1^{∞} , $\lim_{x\to 2}(2x-3)=1$, $\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-2}=\infty$)=$e^{\lim_{x\to 2}(2x-3-1)\frac{2x+1}{x-2}}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(2x+1)}{x-2}}=e^{\lim_{x\to 2}2(2x+1)}=e^{10}$.

Răspuns: $\lim_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{2x+1}{x-2}}=e^{10}$.

2. $\lim_{x\to -\infty}(x-2)(\ln(5-4x)-\ln(7-4x))$.

Rezolvare. În paranteze figurează o nedeterminare de tipul $\infty-\infty$. Utilizând proprietățile funcției logaritmice, obținem:

3. $\lim_{x\to -\infty}(x-2)(\ln(5-4x)-\ln(7-4x))=\lim_{x\to -\infty}(x-2)\ln\frac{5-4x}{7-4x}=$ (acum figurează o nedeterminare de tipul $\infty\cdot 0$) = $\lim_{x\to -\infty}\ln(\frac{5-4x}{7-4x})^{(x-2)}$ = (deoarece $\ln u$ este continue) = ln $\lim_{x\to -\infty}(\frac{5-4x}{7-4x})^{(x-2)}$=(nedeterminare de tipul 1^{∞})=ln $e^{\lim_{x\to-\infty}(\frac{5-4x}{7-4x}-1)(x-2)}$=

$=\lim_{x\to -\infty}\frac{5-4x-7+4x}{7-4x}(x-2)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2(x-2)}{7-4x}$ = (nedeterminare de tipul $\frac{\infty}{\infty}$) =

$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-2(1-\frac{2}{x})}{\frac{7}{x}-4}=\frac{1}{2}$.

Răspuns: $\lim_{x\to -\infty}(x-2)(\ln(5-4x)-\ln(7-4x))=\frac{1}{2}$.

4. $\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x+4tg\ 5x}{1-cosx}$.

Rezolvare. $\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin 3x-3arctg\ 2x}{1-cosx}$ =(nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$) =

$=\lim_{x\to 0}\frac{2(3x+\frac{3^3x^3}{3!})-3(2x-\frac{2^3x^3}{3!})}{\frac{x^2}{2!}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9}{2}x^3+\frac{8}{27}x^3}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{259}{54}x^3}{\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{259x}{27}$=0.

Răspuns: $\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x+4tg\ 5x}{1-cosx}=0$.

Bibliografie

1. Botnaru D. Îndrumător la matematică. Editura “Tehnica”, Chișinău 2008.
2. Miron S. Teoria limitelor și calculul diferențial. Editura „Spiru Haret”, Iași, 2006.