Cu privire la unele probleme referitoare la dreapta și planul în spațiu

Iurie Baltag

Abstract. Se examinează următoarele probleme: Poziția reciprocă a două drepte în spațiu; Determinarea distanței minime dintre două drepte și a punctelor de pe ele ce asigură această distanță; Poziția reciprocă a unei drepte și a unui plan; Determinarea punctului simetric în raport cu un plan sau cu o dreaptă; Determinarea proecției unei drepte pe un plan.

1) Fie dați vectorii directori ai dreptelor și câte un punct pe fiecare din dreptele (a) și (b): $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\ A(x_1,y_1,z_1);\ \vec{b}=(b_1,b_2,b_3), B(x_2,y_2,z_2)$.

Mai întâi verificăm, dacă vectorii dați sunt colineari. În caz afirmativ dreptele sunt paralele.

Fie, că vectorii nu sunt colineari. Atunci (a) și (b) se intersectează sau sunt neconcurente.

Pentru a determina poziția lor scriem ecuațiile parametrice ale dreptelor:

$$(a):\begin{cases} x=x_1+a_1t \\ y=y_1+a_2t,\ t\in R;\ (b): \\ z=z_1+a_3t \end{cases}\begin{cases} x=x_2+b_1r \\ y=y_2+b_2r,\ r\in R. \\ z=z_2+b_3r \end{cases} \qquad (1)$$

Dacă dreptele se intersectează, atunci ele au un punct comun. Pentru a-l determina rezolvăm următorul sistem ce conține necunoscutele t și r:

$$\begin{cases} x_1+a_1t=x_2+b_1r \\ y_1+a_2t=y_2+b_2r \\ z_1+a_3t=z_2+b_3r \end{cases} \qquad (2).$$

Sunt posibile următoarele două cazuri:

1. Sistemul (2) are soluție unică, atunci dreptele se intersectează și determinăm punctul lor de intersecție.
2. Sistemul (2) este incompatibil, atunci dreptele sunt neconcurente.

2) Fie date două drepte neconcurente. Punem problema să aflăm distanța minimă dintre drepte și a punctelor de pe ele ce asigură această distanță.

Cu acest scop alcătuim funcția de două variabile t și r ce descrie distanța dintre orice două puncte situate pe dreptele (a) și (b):

$$s(t,r)=\sqrt{(x_1+a_1t-x_2-b_1r)^2+(y_1+a_2t-y_2-b_2r)^2+(z_1+a_3t-z_2-b_3r)^2}. \qquad (3)$$

Din considerente geometrice este clar, că această funcție poate avea doar un singur punct de extrem și anume un punct de minim. Pentru a-l afla aplicăm condiția necesară de extrem:

$$\begin{cases} s'_t = 0 \\ s'_r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(x_1 + a_1 t - x_2 - b_1 r) + a_2(y_1 + a_2 t - y_2 - b_2 r) + a_3(z_1 + a_3 t - z_2 - b_3 r) = 0 \\ b_1(x_1 + a_1 t - x_2 - b_1 r) + b_2(y_1 + a_2 t - y_2 - b_2 r) + b_3(z_1 + a_3 t - z_2 - b_3 r) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Din sistemul (4) determinăm coordonatele punctului de minim $M(t_0,r_0)$ și atunci $s(M)$ va fi distanța minimă dintre drepte. Pentru a determina punctele de pe drepte ce asigură această distanță înlocuim în ecuațiile parametrice (1) $t = t_0$, $r = r_0$.

Notă. Dacă dreptele sunt paralele, putem lua pe una din ele un punct fix și atunci funcția (3) va fi de o singură variabilă.

3) Fie dată ecuația generală a unui plan: $\pi : ax + by + cz + d = 0.$ (5)

Înlocuim ecuațiile parametrice ale dreptei (a) din (1) în ecuația planului și obținem o ecuație de gradul 1 cu o necunoscută t:

$$a(x_1 + a_1 t) + b(y_1 + a_2 t) + c(z_1 + z_2 t) + d = 0. \quad (6)$$

Sunt posibile următoarele trei cazuri:

1. Ecuația (6) are soluție unică $t = t_0$, atunci dreapta intersectează planul într-un punct. Pentru a afla coordonatele lui înlocuim această valoare a lui t în ecuațiile parametrice ale dreptei (1).
2. Ecuația (6) nu are soluții. Atunci dreapta este paralelă planului.
3. Ecuația (6) are forma $0t = 0$, adică estre adevărată pentru orice t. În acest caz dreapta aparține planului.

4) Fie dată ecuația (5) a unui plan π și un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ în afara lui. Pentru a determina punctul lui simetric în raport cu planul dat alcătuim ecuațiile parametrice ale dreptei (a) ce trece prin punctul M_1 perpendicular pe plan și aflăm punctul de intersecție al acestei drepte cu planul. Ecuațiile acestei drepte sunt de forma (1), în care înlocuim a, b, c cu a_1, b_1, c_1.

Procedând ca și în cazul 3), aflăm punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de intersecție al dreptei (a) cu planul. Apoi aplicăm formulele mijlocului unui segment și determinăm punctul M_2 simetric lui $M_1(x_1, y_1, z_1)$ în raport cu planul dat: $M_0 = 0{,}5(M_1 + M_2) \Rightarrow M_2 = 2M_0 - M_1.$

Dacă trebuie să aflăm punctul simetric lui M_1 în raport cu o dreaptă (b) ce are ecuațiile parametrice de forma (1), atunci alcătuim ecuația planului de forma (7) ce trece prin M_1 perpendicular pe (b) și aflăm punctul de intersecție al acestui plan cu dreapta dată. Apoi, aplicând formulele mijlocului unui segment, la fel ca și în cazul precedent aflăm punctul căutat.

5) Fie dată ecuația (5) a unui plan π și o dreaptă (a) cu vectorul director $\vec{a}$ ce trece prin punctul A. Pentru a determina ecuațiile dreptei ce reprezintă proecția dreptei (a) pe planul dat deducem mai întâi ecuația planului $\pi_1 \perp \pi$ ce trece prin dreapta (a). Cu acest scop aflăm vectorul normal al acestui plan, calculând produsul vectorial dintre vectorul director al dreptei (a) și vectorul normal al planului π și alcătuim ecuația planului căutat aplicând formula ecuației planului ce trece prin punctul $A(x_1,y_1,z_1)$ cu vectorul normal $\vec{n}_1$:

$$\vec{n}_1 = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = (a_1, b_1, c_1) \Rightarrow \pi_1 : a_1(x - x_1) + b_1(y - y_1) + c_1(z - z_1) = 0. \qquad (7)$$

Intersecția celor două plane va fi dreapta ce reprezenta proiecția dreptei (a) pe planul π.

La finele acestei lucrări vom aduce un exemplu de aplicare a metodelor expuse anterior.

Problemă. Se dau ecuațiile parametrice ale dreptelor (a) și (b), un punct M_1 și ecuația unui plan π:

$$(a): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, t \in R; \; (b): \begin{cases} x = 2 + r \\ y = 1 - r, \\ z = 3r \end{cases} r \in R; \;\; M_1(-4,1,2); \;\; \pi: \; x + 2y - z - 2 = 0.$$

Să se determine:

1. Poziția reciprocă a dreptelor (a) și (b), distanța minimă dintre drepte și punctele de pe ele ce asigură această distanță.
2. Poziția reciprocă a dreptei (a) și planului π.
3. Punctul simetric lui M în raport cu dreapta (b).
4. Ecuația dreptei ce reprezintă proecția dreptei (a) pe acest plan.

Soluții: 1. Scriem vectorii directori ai dreptelor: $\vec{a} = (2,1,3), \vec{b} = (1,-1,3)$.
Evident, ei nu sunt colineari, deci dreptele nu sunt paralele. Alcătuim pentru aceste drepte sistemul (2): $\begin{cases} 2 + 2t = 2 + r \\ t = 1 - r \\ 3 + 3t = 3r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t - r = 0 \\ t + r = 1 \\ t - r = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t = 1 \\ t + r = 1 \\ 2t = 0 \end{cases}$.

Acest sistem este incompatibil, prin urmare aceste drepte sunt neconcurente. Pentru a afla distanța minimă dintre drepte alcătuim funcția (3) și rezolvăm sistemul (4):

$$s(t,r) = \sqrt{(2t - r)^2 + (t + r - 1)^2 + (t - r + 1)^2} = \sqrt{6t^2 + 3r^2 - 4tr - 4r}.$$

$$\begin{cases} s'_t = 0 \\ s'_r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12t - 4r = 0 \\ 6r - 4t - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2}{7}, \; r = \frac{6}{7} \Rightarrow \min s = s\left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right) = \frac{\sqrt{13}}{7}$$

Punctele ce asigură distanța minimă vor fi $A_0\left(\frac{18}{7},\frac{2}{7},\frac{27}{7}\right),\quad B_0\left(\frac{20}{7},\frac{1}{7},\frac{18}{7}\right).$

2. Înlocuim ecuațiile dreptei (a) în ecuația planului și aflăm valoare lui t ce corespunde punctului lor de intersecție D:

$$2+2t+2t-3-3t-2=0 \Rightarrow t=3 \Rightarrow D(9,3,12).$$

3. Scriem ecuația planului $\pi_1 \perp (b)$ care trece prin punctul M1 , luând în calitate de vector normal vectorul director al dreaptei (b); aplicăm formula (7): $\pi_1 : x-4-(y-1)+3(z-3)=0 \Rightarrow x-y+3z-12=0$ Apoi aflăm punctul lor de intersecție: $2+r-(1-r)+3(3r)-12=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow M_0(3,0,3).$

În sfârșit, aplicăm formulele mijlocului unui segment și determinăm punctul M2 simetric lui M_1 în raport cu dreapta dată:

$$M_0=0{,}5(M_1+M_2) \Rightarrow M_2=2M_0-M_1=(10,-1,4).$$

4. Deducem ecuația planului $\pi_2 \perp \pi$ ce trece prin dreapta (a). Cu acest scop aflăm mai întâi vectorul normal al acestui plan, calculând produsul vectorial dintre vectorul director al dreptei (a) și vectorul normal al planului π:

$$\vec{n}_1=[\vec{a}\cdot\vec{n}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}.$$

Apoi luăm un punct A(2, 0, 3) pe dreapta (a) și alcătuim ecuația acestui plan:

$$\pi_2 : -7(x-2)+5(y-0)+3(z-3)=0 \Rightarrow 7x-5y+3z+5=0.$$

Luăm într-un sistem ecuațiile planelor și obținem ecuațiile dreptei – proiecție:

$$\begin{cases}7x-5y+3z+5=0\\ x+2y-z-2=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{7}.$$

Bibliografie

1. Năstăsescu C., Niță C., Stănescu I. Elemente de algebră superioară, București, 1993.
2. Baltag I., Baltag Iu. Elemente de algebră liniară și geometrie analitică. Chișinău, 2008.
3. Baltag Iu. Elemente de algebră liniară și vectorială. Chișinău, 2008.
4. Chletenic D. Culegere de problem la geometria analitică. Moscova, 1976.

Iurie Baltag
Universitatea Tehnică din Moldova
e-mail: iubaltag@mail.ru