ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Олег МИНЧЕВ[1],
Максим БЕЛОУСОВ[2],

[1] Технический Университет Молдовы, Факультет инженерной, индустриальной механики и транспорта, TCM202, Кишинев, Молдова
[2]Технический Университет Молдовы, Факультет инженерной, индустриальной механики и транспорта, ITA203, Кишинев, Молдова

* Отвечающий автор: Минчев Олег, oleg.mincev@if.utm.md

Резюме. *В данной работе рассматриваются приложения интегрального исчисления в геометрии и механике. В частности, особое внимание уделяется выводу формул объемов тел вращения и раскрывается их смысл. Также рассматривается применение интегрального исчисления для вычисления массы и нахождения центра масс дуги пространственной кривой.*

Ключевые слова*: определенный интеграл, несобственный интеграл, объем тела вращения, масса дуги кривой в пространстве, центр масс, криволинейный интеграл.*

Введение. Для решения геометрических задач учащимся в школе даются готовые формулы по вычислению объемов некоторых тел без их вывода. Смысл некоторых формул можно понять интуитивно, но для более сложных тел, в частности тел вращения, получить необходимые формулы без применения интегрального исчисления сделать очень сложно. В данной работе показана эффективность использования различного рода интегралов в геометрии и механике.

Для нахождения объемов таких тел вращения как цилиндр, сфера, тор, конус и эллипсоид применяется определенный интеграл. С помощью несобственного интеграла вычисляется площадь бесконечной пластины, а также объем бесконечного тела, полученного при ее вращении. Применяя криволинейный интеграл, вычисляется масса дуги пространственной кривой и определяется ее центр тяжести.

Вычисление объема тела, полученного вращением пластины вокруг оси *OX*.

Пусть дана пластина, ограниченная снизу осью *OX,* а сверху графиком неотрицательной функции $y = f(x)$ на участке $x \in [a; b]$. Вращая данную пластину вокруг оси *OX,* получим тело, сечения которого плоскостями перпендикулярными этой оси представляют собой круги переменного радиуса $r = f(x)$. Объем этого тела равен определенному интегралу от площади данных кругов в заданных пределах, а именно:

$$V=\pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{1}$$

Вывод формул объема тел вращения:

a) Цилиндр, радиус основания r и высота h. $f(x) = r$, $x \in [0;h]$.

$$V=\pi \int_0^h r^2\, dx = \boldsymbol{\pi r^2 h} \tag{2}$$

b) Сфера, $f(x) =\sqrt{r^2-x^2}$, $f(x) \geq 0$, $x \in [-r;r]$

$$V=\pi \int_{-r}^r (r^2-x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{3}$$

c) Конус, $f(x) = kx$, $x \in [0;h]$; $k = \frac{r}{h}$

$$V = \pi \int_0^h (kx)^2\, dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\, dx = \boldsymbol{\frac{\pi r^2 h}{3}} \tag{4}$$

d) Эллипсоид вращения, $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, y \geq 0, x \in [-a; a]$

$$V=\pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi a b^2 \tag{5}$$

e) Тор, полученный вращением окружности $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, где b - расстояние от центра окружности до оси OX ($b > r$); $x \in [-r; r]$

$$V=\pi \int_{-r}^{r} \left(\left(b + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - \left(b - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \right) dx = 2\pi \int_{0}^{r} 4b\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2\pi^2 b r^2 \tag{6}$$

f) Бесконечная пластина: $f(x)=\frac{1}{x}$, $1 \leq x < +\infty$

$$V = \pi \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{+\infty} = \pi \tag{7}$$

в то же время, **площадь данной пластины**:

$$S = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln(x)|_{1}^{+\infty} = +\infty \tag{7*}$$

Вычисление координат центра масс и массы пространственной дуги

Пусть задана кривая в пространстве в параметрическом виде: x = x(t), y = y(t), z = z(t), а также в точках заданной кривой $\rho\,(x, y, z)$ – функция распределения плотности.С помощью криволинейного интеграла можно вычислить массу дуги этой пространственной кривой и ее координаты центра масс на заданном участке $t \in [\alpha; \beta]$. Для этого, используя криволинейный интеграл 1 рода, получим:

$$m = \int_{L} \rho\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} \rho ds \quad \text{, где } ds = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt \tag{8}$$

$$X_c = \frac{1}{m}\int_{\alpha}^{\beta} (\rho x(t)) ds \qquad Y_c = \frac{1}{m}\int_{\alpha}^{\beta} (\rho y(t)) ds \qquad Z_c = \frac{1}{m}\int_{\alpha}^{\beta} (\rho z(t)) ds \tag{9}$$

Ниже приведен пример вычисления массы и координат центра масс для первого витка винтовой цилиндрической линии на участке $t \in [0; 2\pi]$: *x(t) = r cos(t); y(t)= r sin(t); z(t)= bt,* с плотностью, равной квадрату расстояния до начала координат $\rho = x^2+y^2+z^2$:

$$m = \int_{0}^{2\pi} (r^2 + (bt)^2)\sqrt{r^2 + b^2}\, dt = \sqrt{r^2 + b^2}\left(r^2 t + \frac{b^2 t^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2\pi} = \left(2r^2\pi + \frac{8b^2\pi^3}{3}\right)\sqrt{r^2 + b^2} \tag{10}$$

$$X_c = 4\pi b^2 r\, \frac{\sqrt{r^2+b^2}}{m} \qquad Y_c = -\,4\pi^2 b^2 r\, \frac{\sqrt{r^2+b^2}}{m} \qquad Z_c = 2\pi^2 b(r^2+2\pi^2 b^2)\, \frac{\sqrt{r^2+b^2}}{m} \tag{11}$$

где С-точка центра масс.

Выражаем особую благодарность нашему научному руководителю, коференциару департамента математики ТУМ, Юрию Инокентьевичу Балтаг, за предложенные идеи и помощь при реализации данного доклада.

Литература

1. Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчислениу (для ВТУЗОВ) . Том 1 и 2, Москва, “ Наука “, 1978.*