MODURI DE REPREZENTARE A LINIILOR

Cristina VISTERNICEANU

Universitatea Tehnica a Moldovei, Facultatea Construcții, Geodezie și Cadastru, Departamentul Inginerie Civilă și Geodezie, Grupa EDI-2004, Chișinău, Republica Moldova

Abstract. *The paper describes ways of definition of a line. In a plan the line can be defined as the graph of a function or the graph of an equation. It can be represented as the trajectory of the movement of a point or, more generally, in a parametric way. In space, the line can be defined as the intersection of two surfaces or in a parametric way. The aspect of a line can be modified by modifying certain of its parameters. This is being shown through the example of an astroid.*

Cuvinte cheie: *Sistem de coordonate, graficul unei funcţii, graficul unei ecuaţii, ecuaţii parametrice.*

Introducere

Elaborarea, în sec. 17, de către Rene Decart (R. Descartes) a sistemului ortogonal de coordonate a consti-tuit un punct de cotitură în dezvoltarea matematicii. Studiul multor obiecte geometrice (linii, suprafeţe, figuri) a fost redus la studiul obiectelor algebrice (ecuaţii, inecuaţii) sau la cel al analizei matematice (de exemplu, la studiul funcţiilor). Linia este primul dintre aceste obiecte geometrice. Într-un sistem de coordonate (cartezian sau polar) linia plană poate fi determinată diferit: *explicit, implicit, parametric*.

1. Reprezentarea explicită a liniei

Oricare linie L din planul XOY este o mulţime de puncte de forma $M(x,y)$. Linia este determinată explicit, dacă ordonata oricărui punct al ei este funcţie de abscisă:

$$y = f(x). \tag{1}$$

În acest caz, linia L este graficul funcţiei $f(x)$. Dreapta este, poate, cea mai perfectă linie. Oricare dreaptă, cu excepţia celor paralele axei OY, are o reprezentare simplă: $y = mx + b$.

În sistemul polar de coordonate, o linie de asemenea este o mulţime de puncte $M(\rho,\theta)$. Sub forma explicită, o linie poate fe reprezentată de ecuaţia $\rho = f(\theta)$. În acest sistem, multe funcţii reprezintă linii exotice, care în sistemul cartezian nici nu-şi au locul. De exemplu, în sistemul XOY cercul nu este graficul unei funcţii. În cel polar el este determinat de funcţia simplă $\rho = R$ (R – const.). Alt exemplu: funcţia $\rho = a\sin 3\theta$ ($a > 0$) reprezintă *roza cu trei petale* (Fig. 1,a)).

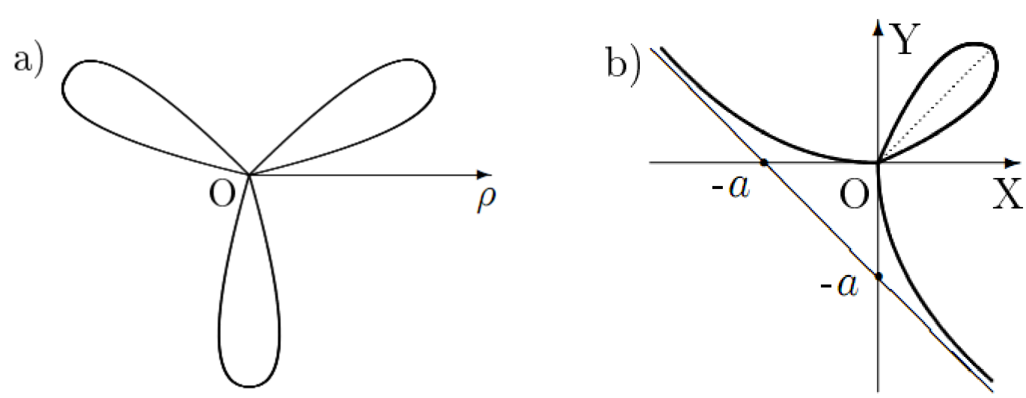

Figura 1

2. **Rezentarea implicită a liniei.**

În acest caz, coordonatele (x, y) ale oricărui punct M de pe linia L reprezintă o soluţie a unei ecuaţii cu două necunoscute:

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Se mai spune, că linia L este graficul acestei ecuaţii. De obicei, trasarea liniei după ecuaţia (2) întâmpină anumite dificultăţi. Reprezentări implicite au bine cunoscutele conice (secţiuni conice): cercul, elipsa, hiperbola şi parabola. O linie mai puţin cunoscută este determinată de ecuaţia $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$, numită *foliul lui Decart* (Fig. 1,b)). Această linie a fost examinată de însuşi Rene Decart, ca exemplu de construcţie a graficului unei ecuaţii.

Remarcă. Oricare reprezentare explicită poate fi tratată şi ca una implicită: e suficient de scris egalitatea
$y = f(x)$ sub forma unei ecuaţii cu două necunoscute, $y - f(x) = 0$. Trecerea inversă, de obicei este difici-lă sau chiar imposibilă.

3. Reprezentarea parametrică a liniei

Considerente cinematice sugerează încă o formă de a determina linia plană. Privind linia ca traiectoria unui punct material *M*, coordonatele acestuia se prezintă ca funcţii de timpul *t*:

$$x = x(t),\ y = y(t). \tag{3}$$

Ecuaţiile (3) reprezintă *ecuaţiile parametrice* ale liniei *L*. Variabila t se numeşte *parametru*; ea poate avea şi alt sens (de exemplu, unghi), dar poate fi lipsit de vre-un sens fizic sau geometric.

Remarcă. Dacă funcţiile $x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt continue pe un interval *I* (închis sau deschis, finit sau infinit), atunci ele determină o linie în planul XOY.

Exemple. **1.** Oricare dreaptă poate fi determinată şi de ecuaţiile parametrice $x = at + x_0$, $y = bt + y_0$. Când parametrul t parcurge mulţimea tuturor numerelor reale, punctul M cu coordonatele (x, y), calculate conform acestor egalităţi, parcurge toată dreapta *L*.

2. Cercul cu ecuaţia canonică $x^2 + y^2 = R^2$ admite şi ecuaţiile parametrice $x = R\cos t,\ y = R\sin t$. Aici parametrul *t* este unghi.

3. Elipsa cu ecuaţia canonică $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ are reprezentarea parametrică $x = a\cos t,$ $y = b\sin t$.

4. *Astroida* (Fig. 2, a)) este determinată de ecuaţiiule $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$; $a > 0$. Ea are 4 axe de simetrie – axele de coordonate şi bisectoarele cadranelor. Originea de coordonate este centrul ei de simetrie.

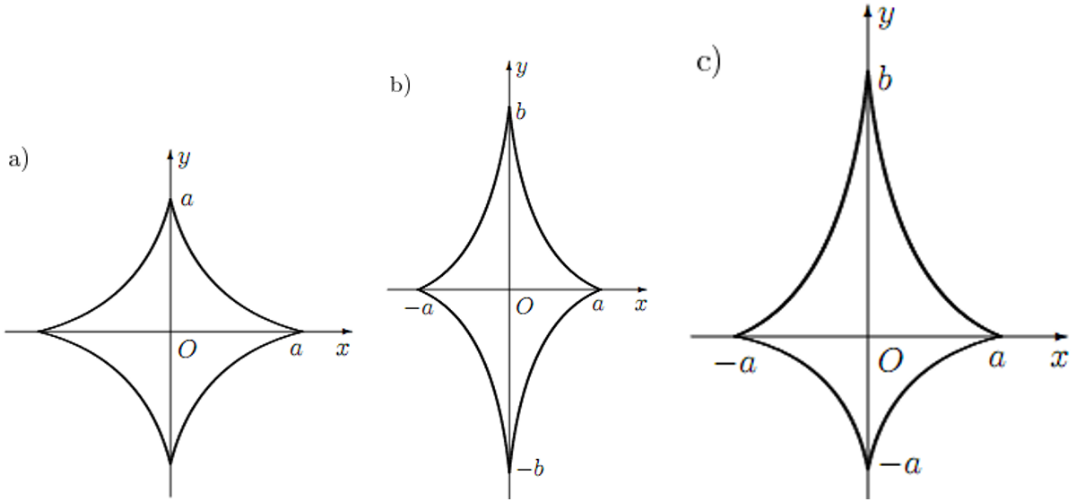

Figura 2

Înlocuind ecuaţia a doua cu ecuaţia $y = b\sin^3 t,$ se obţine o linie doar cu două axe de simetrie (Fig. ,b)). Dacă se trece la ecuaţiile parametrice

$x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t$ pentru $0 \le t \le \pi;$ $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ pentru $\pi < t < 2\pi,$

se obţine linia cu o singură axă de simetrie (axa Oy, Fig. 2,c)).

4. Liniile în spaţiu. În sistemul de coodonate $OXYZ$ liniile pot fi determinate prin două metode princi-pale: ca intersecţia suprafeţelor şi în mod parametric (în particular, ca traiectoria mişcării unui punct). Mai frecvent se foloseşte reprezentarea parametrică a liniei. Coordonatele (x, y, z) ale oricărui punct al liniei se prezintă ca funcţii de un parametru t: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$

Exemplul 1. Sunt bine cunoscute ecuaţiile parametrice ale dreptei în spaţiu:

$x = at + x_0,\ y = bt + y_0,\ z = ct + z_0$.

Exemplul 2. *Spirala cilindrică* este determinată de ecuaţiile parametrice

$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = ht$.

O asemenea formă are filetul unui şurub; constanta *h* reprezintă pasul filetului. În construcţie se folosesc şi scările sub formă de asemenea spirală.

Referințe

1. Клетеник, Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*. М., Наука, 1967.