METODE NUMERICE DE CALCUL A PLĂCILOR

Autor: doctorand Sergiu GALBINEAN
Conducător ştiinţific: dr. hab. prof. univ. Gheorghe MORARU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *Se propune spre examinare metodele numerice de calcul a plăcilor, şi anume, Metoda Elementelor Finite (MEF) şi Metoda Elementelor de Frontieră (MEFr), avantajele şi dezavantajele lor.*

Cuvinte cheie: *placă, metoda elementelor finite, metoda elementelor de frontieră, matrice de rigiditate, funcţii Green*

Metoda elementelor finite (MEF) actualmente este cea mai utilizată metodă numerică de calcul a plăcilor. Ea este foarte eficientă pentru studierea diferitor probleme extrem de variate din diferite domenii de activitate ale inginerului. MEF , de regulă, conduce la rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice cu un număr mare de necunoscute, de aceea, ea este strîns legată de utilizarea calculatoarelor. Un şir de softuri au fost create pe baza MEF aşa cum sînt: SCAD, Lira, Ansis, AxisVM, Autodesk Robot etc.

În MEF placa se prezintă ca o structură discretizată în elemente finite triunghiulare sau dreptunghiulare (fig.1). Cel mai frecvent utilizat element finit la modelarea plăcilor este elementul triunghiular cu trei noduri avînd cîte trei grade de libertate în fiecare nod (w; φ_x, φ_y) (fig.2), din cauza că dă posibilitatea de a aproxima cu o exactitate mai mare frontiera lor de diferită configuraţie.

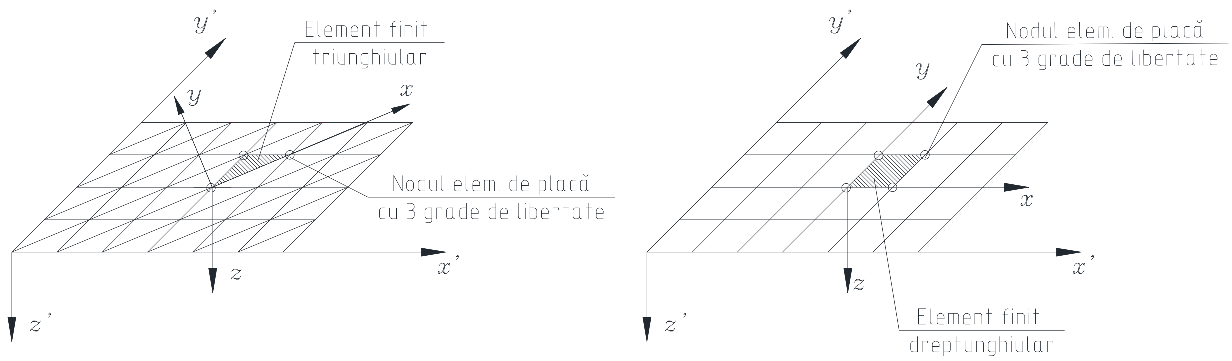
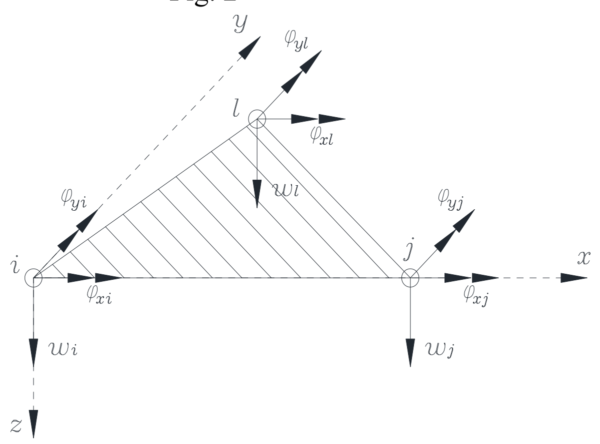


Fig. 1

Fig. 2



Problema de bază a MEF este de a determina matricea de rigiditate a elementului finit. Pentru elementul finit triunghiular matricea de rigiditate în coordonate locale are forma

$$[K^*]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & k_{44} & 0 & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} \\ & & & & k_{55} & 0 & 0 & k_{58} & 0 \\ & & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} \\ & & & & & & k_{77} & k_{78} & k_{79} \\ & & & & & & & k_{88} & k_{89} \\ & & & & & & & & k_{99} \end{bmatrix} \quad (1)$$

În coordonate globale matricea de rigiditate va avea forma:

$$[K]=[T]\left([C]^{-1}\right)^{T}\left[K^{*}\right][C]^{-1}[T]^{T}, \tag{2}$$

unde,

$$[C]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & 0 & x_j^2 & 0 & 0 & x_j^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_j & 0 & 0 & -3x_j^2 & 0 & 0 \\ 1 & x_l & y_l & x_l^2 & x_l y_l & y_l^2 & x_l^3 & x_l y_l^2 & y_l^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_l & 2y_l & 0 & 2x_l y_l & 3y_l^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_l & -y_l & 0 & -3x_l^2 & -y_l^2 & 0 \end{bmatrix};$$

$[T]=\begin{bmatrix} [\lambda] & [0] & [0] \\ [0] & [\lambda] & [0] \\ [0] & [0] & [\lambda] \end{bmatrix}$ -matricea de rotire; $\quad [\lambda]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Sistemul global de ecuații al structurii analizate

$$[K]^{sist}\{\delta\}=\{F\}, \tag{3}$$

unde $\{\delta\}=\left[w_i \quad \varphi_{xi} \quad \varphi_{yi} \quad w_j \quad \varphi_{xj} \quad \varphi_{yj} \quad w_l \quad \varphi_{xl} \quad \varphi_{yl}\right]$; $\quad \{F\}=[T]\left[F^{*}\right]$.

unde: $[K]^{sist}$ – reprezintă matricea globală de rigiditate;

$\{\delta\}$ - vectorul parametrilor nodali;

$\{F^*\}$-vectorul încărcărilor nodale.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații sînt folosite diferite metode : Gauss, Choleski ş.a., care dau posibilitatea de a obține vectorul $\{\delta\}$, adică valorile în noduri ale funcțiilor căutate.

De menționat că tensiunile în limitele fiecărui element sînt constante. De regulă, aceste valori sînt considerate în centrul de greutate al elementului finit. Tensiunile în nodurile elementelor se calculează ca media aritmetică a tensiunilor din centrul de greutate a elementelor alăturate nodului respectiv.

Avantaje:

- Generalitatea;
- Supleţea;
- Simplitatea conceptelor de bază;
- Utilizarea calculatoarelor;
- Uşor de programat;
- Existența programelor de calcul.

Dezavantaje:

- Metoda este aproximativă;
- Sisteme masive de ecuații;
- Necesitatea unei memorii operative mari a calculatorului;
- Probleme de conexiune a elementelor cu diferite grade de libertate;
- Programele MEF sînt scumpe.

La baza **Metodei Elementelor de Frontieră** (MEFr) stă ideea de a ataşa ecuației diferențiale care guvernează fenomenul fizic în interiorul unui domeniu o exprimare corespunzătoare printr-o ecuație integrală pe frontieră. Această formulare în ecuații integrale pe frontieră conduce la posibilitatea tratării problemei numai pe frontiera domeniului, astfel încît numai frontiera domeniului trebuie să fie discretizată (fig.3), reducîndu-se în acest mod numărul gradelor de libertate şi, prin urmare, numărul de ecuații ale sistemului algebric rezultat.

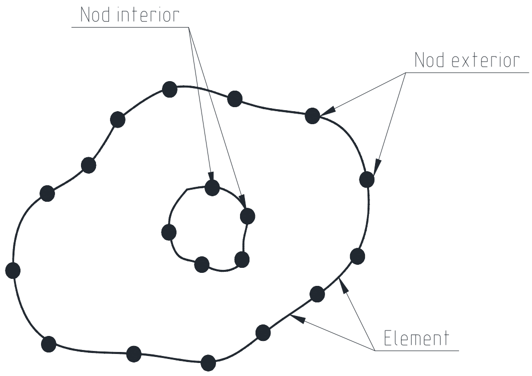
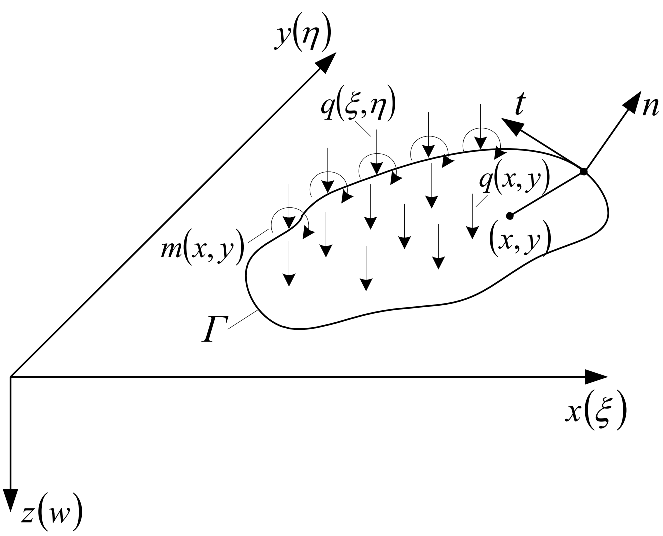


Fig. 3

Pentru a se explica metoda se va examina placa, care ocupă un domeniu 2D finit cu frontiera Γ. Se va studia o placă extinsă la infinit în care este amplasată placa examinată (fig. 4). Pe conturul Γ de obicei se aplică sarcina $q(\xi,\eta)$ şi $m_n(\xi,\eta)$ numite sarcini fictive.
Pentru a reduce problema la ecuații integrale se foloseşte soluția singulară $G_q(x,y,\xi,\eta)$ funcția Green provenită dintr-o sarcină concentrată,



Această soluție are forma :

$$G_q(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r, \tag{4}$$

unde:

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$

unde r - este distanța dintre punctul de observație (x,y) şi punctul (ξ,η) de pe frontieră.
Pentru a rezolva problema este nevoie de o soluție singulară provenită din moment concentrat.
Soluția provenită din momentul concentrat va avea forma:

$$G_m(x,y,\xi,\eta) = \frac{\partial G_q(x,y,\xi,\eta)}{\partial n} \tag{5}$$

Fig. 4

Prin superpoziție obținem soluția problemei provenită din sarcina $q(\xi,\eta)$ şi $m_n(\xi,\eta)$. De exemplu, deplasarea verticală a planului median se va prezenta în forma:

$$w(x,y) = w_q(x,y) + \int_\Gamma \left[G_q(x,y,\xi,\eta)q(\xi,\eta) + G_m(x,y,\xi,\eta)m_n(\xi,\eta)\right]ds \quad \left((x,y)\in\Omega\right). \tag{6}$$

unde Ω este regiunea ocupată de placă.

Soluția $w_q(x,y)$ provenită din sarcina exterioară perpendiculară pe planul median al plăcii se determină prin relația:

$$w_q(x,y) = \iint_{(\Omega)} G_p(x,y,\xi,\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

Funcțiile θ_n, M_n, V_n pot fi exprimate prin deplasarea verticală $w(x,y)$ cu relațiile:

$$\theta_n = \frac{\partial w}{\partial n};$$
$$M_n = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right);$$
$$V_n = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial n \partial s^2}\right),$$

Avantaje:

- Se discretizează doar frontiera plăcii;
- Soluțiile sînt exacte şi continue în interiorul plăcii;
- Pot fi rezolvate diferite probleme a plăcilor cu defecte (fisuri, articulații plastice etc.);
- Date de intrare mai puține;
- Utilizarea calculatorului;
- Utilizează memorie operativă mai mică în comparație cu programele MEF.

Dezavantaje:

- Metoda nu dă rezultate satisfăcătoare în cazul plăcilor cu dimensiuni mari şi grosime mică;
- Se stochează în memoria calculatorului o cantitate mare de date;
- Nu se pot prevedea caracteristici elastice pentru fiecare element finit;
- Lipsa programelor.

***Concluzii*:** Metoda Elementelor de Frontieră reprezintă o metodă de calcul a plăcilor relativ nouă şi de perspectivă la care trebuie de atras o atenție mai mare, întrucît are o serie de avantaje față de Metoda Elementelor Finite. MEFr se află încă în stadiu de cercetare şi este nevoie de timp ca ea să-şi ocupe locul bine meritat pe arena metodelor numerice de calcul şi se aşteaptă ca în viitorul apropiat sa fie create softuri accesibile inginerilor. Deasemnea ar fi un mare avantaj dacă aceste softuri ar conține atît elemente de frontieră, cîi şi elemente finite pentru a reduce din defectele de calcul.

Bibliografie

1. Banerjee, P.K.; Butterfild, R. *Boundary Element Methods in engineering science*. McGraw-Hill Company. (UK) LTD, London – New-York, 1981.
2. Katsikadelis, J.T; Armenakas, A.E. *A new boundary equation solution to the plate problem*. ASME Journal of Applied Mechanics 1989. 56: 364 –374 p.
3. Lazăr, I. *Metoda elementelor de frontieră în inginerie*. Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 1997.
4. Moraru Gh, *Introducere în metoda elementelor finite şi de frontieră,* Chişinău 2002
5. Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Plates and Shells* (2nd edn). McGraw-Hill: New York, 1959.
6. Зенкевич О. *Метод конечных элементов и строительная механика*, Мир, 1975.
7. Лужин, О.В. *Статический и динамический расчет балок, плит и оболочек приемом "расширения" заданной системы*. Исследования по теории сооружений. Вып. 13. Москва. 63-76 с.