

# CALCULUL GRINZILOR PRIN METODA FUNCȚIILOR GREEN LA ACȚIUNEA FORȚEI CONCENTRATE ȘI A DIFERENȚEI DE TEMPERATURĂ

**Autor: doctorand Ion CREȚU**

Universitatea Tehnică a Moldovei

**Abstract:** S-a calculat o grindă static nedeterminată cu o singură deschidere la acțiunea unei forțe exterioare concentrate și a unei acțiuni termice (diferență de temperatură) folosind metoda funcțiilor Green.

Modulul de elasticitate „ $E$ ” și momentul de inerție axial „ $I$ ” rămân constante pe toată lungimea grinzii.

**Cuvinte cheie:** metoda funcțiilor Green, diferență de temperatură ( $\Delta T$ ), săgeata de încovoiere ( $y$ ), unghiul de rotire ( $\theta$ ), momentul de încovoiere ( $M$ ) și forța transversală ( $Q$ ).

## 1. Problemă de calcul:

Momentul cheie în calculul grinzilor prin metoda funcțiilor Green (metoda funcțiilor de influență) este construirea funcțiilor respective Green. Pentru a construi aceste funcții mai întâi de toate este necesar de scris soluțiile generale pentru forța transversală -  $Q$ , momentul de încovoiere -  $M$ , unghiul de rotire -  $\theta$  și săgeata de încovoiere -  $y$  ale ecuației diferențiale a încovoierii transversale directe a axei grinzii. Apoi, scriem condițiile de conjugare și condițiile de limită, din care determinăm constantele arbitrare de integrare. La ultima etapă substituim expresiile obținute pentru constantele arbitrare de integrare în soluțiile generale respective și obținem expresiile finale ale funcțiilor Green pentru  $Q$ ,  $M$ ,  $\theta$  și  $y$ . Calculul grinzilor prin metoda funcțiilor Green (dacă aceste funcții sunt construite deja) se reduce în cazurile cele mai complicate de solicitare, la calculul unor integrale definite simple. Această metodă ne permite ușor să determinăm toate eforturile ( $Q$  și  $M$ ) și deplasările ( $\theta$  și  $y$ ) indiferent de lungimea grinzii, de punctele de aplicare și valorile forțelor, temperaturii și deplasărilor exterioare.

În fig.1 este prezentată schema grinzii cu acțiunile exterioare.

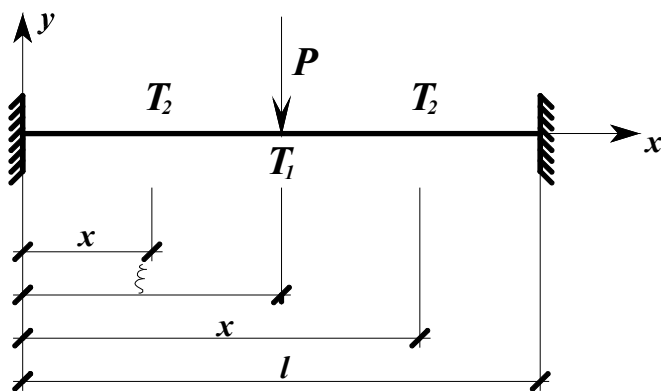


Fig. 1

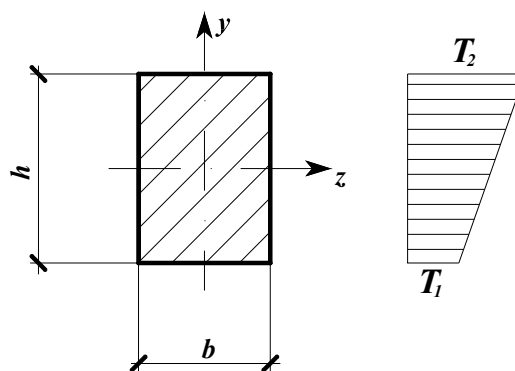


Fig. 2

În fig.2 este arătată secțiunea transversală a grinzii și diagrama distribuției temperaturii pe înălțimea  $h$ .

**Scopul final** este de determinat expresiile analitice finale pentru  $Q$ ,  $M$ ,  $\theta$  și  $y$  ale grinzii solicitate cu forța concentrată  $P$  și diferența de temperatură  $\Delta T$ .

## 2. Rezolvarea problemei:

Mai întâi se construiește funcția Green de la o forță  $P$ , aplicată în punctul arbitrar  $\xi$ . Pentru aceasta:

1) Se scriu soluțiile ecuațiilor diferențiale:

$$\begin{aligned}
 EIy_s^{IV} &= 0; & EIy_d^{IV} &= 0; \\
 EIy_s^{III} &= C_1'; & EIy_d^{III} &= A_1'; \\
 EIy_s^{II} &= C_1' \cdot x + C_2'; & EIy_d^{II} &= A_1' \cdot x + A_2'; \\
 EIy_s^I &= C_1' \cdot \frac{x^2}{2} + C_2' \cdot x + C_3'; & EIy_d^I &= A_1' \cdot \frac{x^2}{2} + A_2' \cdot x + A_3'; \\
 EIy_s &= C_1' \cdot \frac{x^3}{6} + C_2' \cdot \frac{x^2}{2} + C_3' \cdot x + C_4'; & EIy_d &= A_1' \cdot \frac{x^3}{6} + A_2' \cdot \frac{x^2}{2} + A_3' \cdot x + A_4'.
 \end{aligned} \tag{1}$$

2) Se scriu condițiile de conjugare:

$$\begin{aligned}
 EIy_s^{III}(x = \xi - 0) - EIy_d^{III}(x = \xi + 0) &= P; \\
 EIy_s^{II}(x = \xi - 0) &= EIy_d^{II}(x = \xi + 0); \\
 EIy_s^I(x = \xi - 0) &= EIy_d^I(x = \xi + 0); \\
 EIy_s(x = \xi - 0) &= EIy_d(x = \xi + 0).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Se folosesc soluțiile ecuațiilor diferențiale (1) și condițiile de conjugare (2), în final obținem constantele de integrare:

$$\begin{aligned}
 A_1' &= C_1' - P; \\
 A_2' &= C_2' + P \cdot \xi; \\
 A_3' &= C_3' - P \cdot \frac{\xi^2}{2}; \\
 A_4' &= C_4' + P \cdot \frac{\xi^3}{6}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Se introduc expresiile (3) în relația „ $EIy_d$ ” din (1) și obținem:

$$EIy_d = (C_1' - P) \cdot \frac{x^3}{6} + (C_2' + P \cdot \xi) \cdot \frac{x^2}{2} + \left( C_3' - P \cdot \frac{\xi^2}{2} \right) \cdot x + C_4' + P \cdot \frac{\xi^3}{6} \tag{4}$$

Într-o formă mai compactă expresia (4) va fi prezentată sub forma:

$$EIy_d = C_1' \cdot \frac{x^3}{6} + C_2' \cdot \frac{x^2}{2} + C_3' \cdot x + C_4' - P \frac{(x - \xi)^3}{6} \tag{5}$$

3) Se notează  $C_i' = C_i \cdot EI; i = 1, 2, 3, 4$ , se folosesc relațiile „ $EIy_s$ ” din (1) și „ $EIy_d$ ” din (5), se poate scrie expresia generală a săgeții de încovoiere de la forța concentrată, sub forma:

$$y = \begin{cases} y_s = C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4; & 0 \leq x \leq \xi \\ y_d = y_s - P \frac{(x - \xi)^3}{6EI}; & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \tag{6}$$

Dacă în formula (6)  $P=1$ , se obține funcția Green pentru cazul aplicării unei forțe concentrate mobile.

4) Se completează rezultatele obținute, avînd în vedere că grinda este acționată și de diferența de temperatură  $\Delta T = T_1 - T_2$ , unde  $T_1$  și  $T_2$  - temperatura pe fibra de jos, respectiv pe fibra de sus a grinzii.

Din fig. 2, se observă fibra de sus a secțiunii transversale pe care acționează temperatura  $T_2$  se va întinde conform relației  $\alpha_T T_2$ , însă fibra de jos  $\alpha_T T_1$ , unde  $\alpha_T$  - coeficientul dilatării liniare termice.

Dacă se analizează secțiunea în ansamblu se obține că diferența de temperatură într-un singur punct este echivalentă cu unghiul de rotire rigid concentrat ( $\theta_0$ ).

$$\frac{\alpha_T T_2}{h} - \frac{\alpha_T T_1}{h} = \frac{\alpha_T \Delta T}{h} = \bar{\theta} \tag{7}$$

În condițiile problemei diferența de temperatură acționează pe toată lungimea grinzii, ceea ce va fi egal cu unghiul de rotire uniform distribuit pe toată lungimea.

Se analizează expresia săgeții de încovoiere (6) și se observă că unghiul de rotire este caracterizat prin constanta de integrare  $C_3$  care este multiplicată cu  $x$ . Altfel spus săgeata de încovoiere va fi egală cu integrala de la unghiul de rotire concentrat, distribuit pe distanța de acțiune a diferenței de temperatură. Luând în considerare că diferența de temperatură acționează pe toată lungimea grinzii vom obține săgeata  $\bar{y}_s$ :

$$\bar{y}_s = \bar{\theta} \int x dx = \frac{\alpha_T \Delta T}{h} \int x dx = \frac{\alpha_T \Delta T}{2h} x^2 \quad (8)$$

Deci săgeata de încovoiere de la ambele acțiuni va fi:

$$y = \begin{cases} y_s = C_1 \cdot \frac{x^3}{6} + C_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4 + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{2h} \cdot x^2; & 0 \leq x \leq \xi \\ y_d = y_s - P \frac{(x-\xi)^3}{6EI}; & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (9)$$

Unghiul de rotire:  $\theta = y'$

$$\theta = \begin{cases} \theta_s = C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3 + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} \cdot x; & 0 \leq x \leq \xi \\ \theta_d = \theta_s - P \frac{(x-\xi)^2}{2EI}; & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (10)$$

Momentul de încovoiere în cazul acțiunii diferenței de temperatură se calculează cu relația:

$$M = EI \cdot y'' - EI \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} = EI \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - EI \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} \quad (11)$$

$$M = \begin{cases} M_s = \left( C_1 \cdot x + C_2 + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} \right) EI - EI \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h}; & 0 \leq x \leq \xi \\ M_d = M_s - P(x-\xi); & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (12)$$

Forța transversală:  $Q = EI \cdot y'''$

$$Q = \begin{cases} Q_s = C_1 \cdot EI; & 0 \leq x \leq \xi \\ Q_d = Q_s - P; & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (13)$$

5) Conform condițiilor de limită se poate scrie:

$$y_s(0) = 0; \quad \theta_s(0) = 0; \quad y_d(l) = 0; \quad \theta_d(l) = 0; \quad (14)$$

Se folosește condiția de limită  $y_s(0) = 0$  și se obține  $C_4 = 0$ , iar din condiția  $\theta_s(0) = 0$  rezultă  $C_3 = 0$ .

$C_1$  și  $C_2$  se determină din celelalte condiții de limită rămase:

$$\begin{cases} y_d(l) = C_1 \cdot \frac{l^3}{6} + C_2 \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{2h} l^2 - P \frac{(l-\xi)^3}{6EI} = 0 \\ \theta_d(l) = C_1 \cdot \frac{l^2}{2} + C_2 \cdot l + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} l - P \frac{(l-\xi)^2}{2EI} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

sau

$$\begin{cases} C_1 \cdot l^3 + 3C_2 \cdot l^2 = -\frac{3\alpha_T \cdot \Delta T}{h} l^2 + P \frac{(l-\xi)^3}{EI} \\ C_1 \cdot l^2 + 2C_2 \cdot l = -\frac{2\alpha_T \cdot \Delta T}{h} l + P \frac{(l-\xi)^2}{EI}. \end{cases} \quad (16)$$

Din (16) obținem:

$$C_1 = \frac{P(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3 EI} \quad (17)$$

$$C_2 = -\left( \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} + \frac{P(l-\xi)^2 \xi}{l^2 \cdot EI} \right) \quad (18)$$

6) Se înlocuiesc constantele de integrare  $C_1$  (17) și  $C_2$  (18) în relațiile (9), (10), (12), (13) și se obțin următoarele expresii analitice pentru  $y, \theta, M, Q$ :

- pentru săgeata de încovoiere  $y$ :

$$y = \begin{cases} y_s = \frac{P(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3 EI} \cdot \frac{x^3}{6} - \left( \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} + \frac{P(l-\xi)^2 \xi}{l^2 \cdot EI} \right) \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{2 \cdot h} \cdot x^2; & 0 \leq x \leq \xi \\ y_d = y_s - P \frac{(x-\xi)^3}{6EI}; & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (19)$$

- expresia finală pentru  $y$  va fi:

$$y = \begin{cases} y_s = \frac{P(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3 EI} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{P(l-\xi)^2 \xi}{l^2 \cdot EI} \cdot \frac{x^2}{2}; & 0 \leq x \leq \xi \\ y_d = y_s - P \frac{(x-\xi)^3}{6EI}; & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (20)$$

- pentru unghiul de rotire  $\theta$ :

$$\theta = \begin{cases} \theta_s = \frac{P(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3 EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \left( \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} + \frac{P(l-\xi)^2 \xi}{l^2 \cdot EI} \right) \cdot x + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} \cdot x; & 0 \leq x \leq \xi \\ \theta_d = \theta_s - P \frac{(x-\xi)^2}{2EI}; & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (21)$$

- expresia finală pentru  $\theta$  va fi:

$$\theta = \begin{cases} \theta_s = \frac{P(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3 EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{P(l-\xi)^2 \xi}{l^2 \cdot EI} \cdot x; & 0 \leq x \leq \xi \\ \theta_d = \theta_s - P \frac{(x-\xi)^2}{2EI}; & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (22)$$

- pentru momentul de încovoiere  $M$ :

$$M = \begin{cases} M_s = \left( \frac{P(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3 EI} \cdot x - \left( \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} + \frac{P(l-\xi)^2 \xi}{l^2 \cdot EI} \right) + \frac{\alpha_T \cdot \Delta T_0}{h} \right) EI - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} EI; & 0 \leq x \leq \xi \\ M_d = M_s - P(x-\xi); & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (23)$$

- expresia finală pentru  $M$  va fi:

$$M = \begin{cases} M_s = \frac{P(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3} \cdot x - \frac{P(l-\xi)^2 \xi}{l^2} - \frac{\alpha_T \cdot \Delta T}{h} EI; & 0 \leq x \leq \xi \\ M_d = M_s - P(x-\xi); & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (24)$$

- în fine expresia finală pentru forța transversală  $Q$  va fi:

$$Q = \begin{cases} Q_s = \frac{P(l-\xi)^2(l+2\xi)}{l^3}; & 0 \leq x \leq \xi \\ Q_d = Q_s - P; & \xi \leq x \leq l. \end{cases} \quad (25)$$

7) S-a analizat factorii  $y, \theta, M, Q$  pentru următoarea problemă (vezi fig.1): o grindă static nedeterminată cu o singură deschidere din beton armat de lungimea  $l=5m$ , secțiunea transversală de formă dreptunghiulară  $b=0,25m, h=0,40m$ , forța concentrată cu valoarea  $P=30kN$  aplicată la distanța  $\xi=2m$ , temperatura  $T_1=18^\circ C$  și  $T_2=30^\circ C, \Delta T=T_1-T_2$  (vezi fig.2), coeficientul de dilatare termic  $\alpha = \frac{10^{-5}}{^\circ C}$ , modulul de

elasticitate  $E = 21 \cdot 10^3 MPa$ , iar momentul de inerție a secțiunii  $I_z = 1.333 \cdot 10^{-3} m^4$ .

8) S-au folosit expresiile finale (20), (22), (24), (25) și programa Maple 15 pentru a construit diagramele  $y, \theta, M, Q$ , prezentate în următoarele figuri 3-6:

Săgeata de încovoiere:

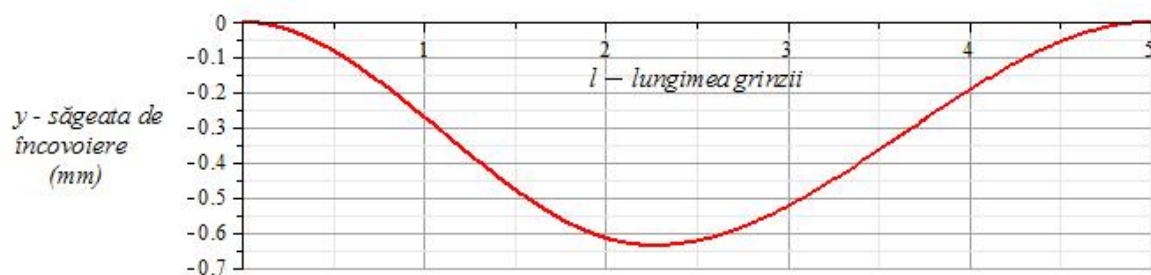


Fig.3

Unghiul de rotire:

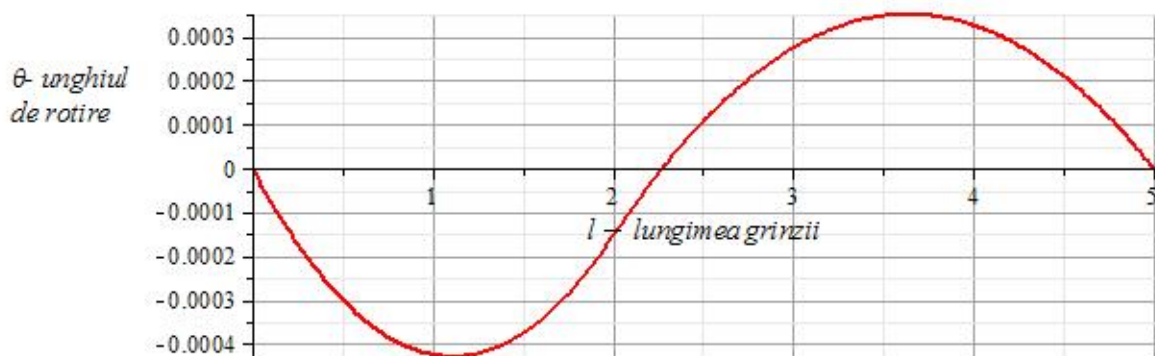


Fig.4

Momentul de încovoiere:

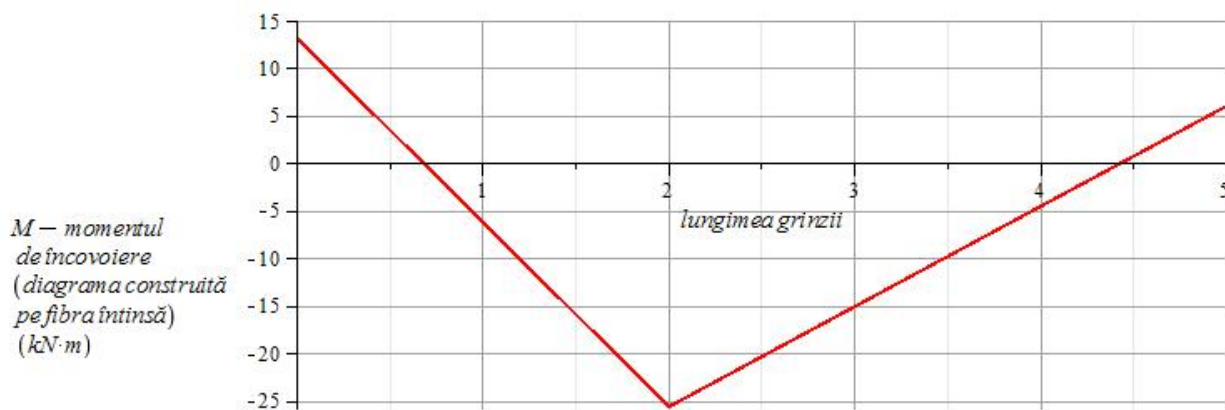


Fig.5

Forța transversală:

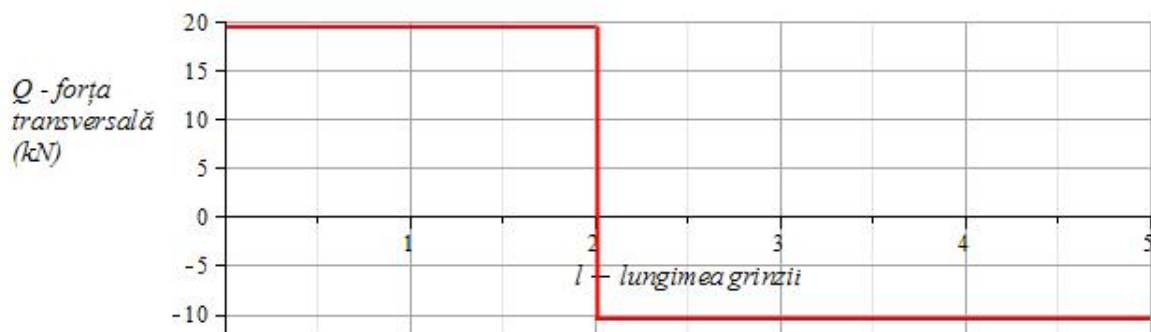


Fig.6

### Concluzii:

1. Din calcule se observa: în cazul acțiunii diferenței de temperatură pentru grinda încastrată la ambele capete factorii cinematici sunt egali cu zero, însă apar eforturi interioare, dar de la acțiunea forței concentrate atât eforturile interioare cât și deplasările au valoare numerică diferite de zero.
2. În cazul armării secțiunii transversale a grinzii din beton armat din punct de vedere a rezistenței se va folosi valoarea momentului de încovoiere și a forței transversale calculate cu relațiile (24) și (25) pentru calculul din condițiile de rigiditate se vor folosi relațiile (20) și (22).
3. Avantajele calculului grinzilor prin metoda funcțiilor Green în comparație cu metodele cunoscute din mecanica structurilor sunt:
  - odată determinată funcția de influență a săgeții de încovoiere pentru grinda dată, pot fi calculate valorile  $y$ ,  $\theta$ ,  $M$ ,  $Q$  indiferent de lungimea grinzii, de la diferite tipuri de acțiuni, punct de aplicare și valoarea sarcinii.
  - din diagramele (fig. 3-6) poate fi ușor observat punctul unde factorul cinematic sau efortul este maximal. Acest calcul e mult mai complicat folosind metodele mecanicii structurilor, dacă ne referim mai ales la factorii cinematici. În cazul în care nu este construit nici un grafic, punctul unde valoarea  $y$ ,  $\theta$ ,  $M$ ,  $Q$  este maximală se poate determina prin derivarea și egalarea cu zero a expresiei respective, apoi se calculează și valoarea maximală.

### Bibliografie:

1. Victor Șeremet. *Construirea funcțiilor de influență și formulele de calcul pentru grinzi*. Chișinău, 2003.
2. Victor Șeremet. *Exemple de calcul al grinzilor cu o deschidere prin metoda funcțiilor Green*. Chișinău, 2003.
3. V.I Feodosiev. *Rezistența materialelor*. Chișinău, 1992.