UNELE PROCEDEE DE AFLARE A LIMITEI FUNCȚIEI

Autor: Irina GONȚA
Coordonator științific: conf. dr., Ion LEAH

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *The paper is a synthesis of the main methods for finding the limits of functions. These are: two remarkable limits (and as a consequence, the use of equivalent infinitesimal functions), l'Hospital's rule, and a more sophisticated method – the power series expansion of functions. In the end, is analysed the limit of the numerical sequence having the general term equal to the integral sum of a certain function over a certain interval.*

Cuvinte cheie: *limita funcției, nedeterminări, limite remarcabile, infiniți mici echivalenți, dezvoltare în serie de puteri, sume integrale.*

Limita funcției este o noțiune fundamentală în matematică. Ei i se datorează apariția şi dezvoltarea anali-zei matematice. Prin intermediul ei se definesc derivatele şi integralele, spectrul de aplicații ale cărora pare a fi nelimitat. Pentru a fi aplicată, limita funcției trebuie calculată. Definiția limitei nu este constructivă, în sensul că ea nu conține şi calea de aflare a limitei. Din acest motiv, nu există un algoritm standard de aflare a limitei. Ne vom opri la câteva metode de calculare a limitei funcției, diferite de cele elementare. Acestea vor fi: două limite remarcabile împreună cu consecințele lor, regula lui l'Hospital, dezvoltarea funcțiilor în serie de puteri, folosirea sumelor integrale.

1. Prima limită remarcabilă: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Această limită se aplică în majoritatea cazurilor, în care figu-rează funcții trigonometrice. Din prima limită remarcabilă rezultă 4 perechi importante de infiniți mici echivalenți:
Pentru $x\to 0$: **1.** $\sin x\sim x$; **2**. $\operatorname{tg} x\sim x$; **3**. $\arcsin x\sim x$ **4**. $\operatorname{arctg} x\sim x$
La calcularea limitelor, numărătorul şi numitorul fracției pot fi înlocuiți prin infiniți mici echivalenți, de obicei, mai simpli.

Exemplul 1. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot arctgx}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{\cos x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}{x\cdot x\cdot\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{1}{2\left(1+\sqrt{\cos 0}\right)}=\frac{1}{4}.$$

2. *Limita a doua remarcabilă:* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, sau, în mod echivalent, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Aproape în exclusivitate, ea se aplică în cazul nedeterminărilor de tipul $\left|1^\infty\right|$. Din $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ mai rezultă două perechi de infiniți mici echivalenți, care se adaogă celor patru din (1):
Pentru $x\to 0$: **5.** $e^{x-1}\sim x$; **6.** $\ln(1+x)\sim x$.

Exemplul 2. a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left[(e^x-1)-(e^{-x}-1)\right]}{e^{x^3+1}-e}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(e^x-1)}{e(e^{x^3}-1)}-\lim_{x\to 0}\frac{x^2(e^{-x}-1)}{e(e^{x^3}-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x}{e\cdot x^3}-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(-x)}{e\cdot x^3}=\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{2}{e};$$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x\ln 2}-2}{\ln\left[1+(x-1)\right]}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{[(x-1)+1]\ln 2}-2}{\ln\left[1+(x-1)\right]}=l.$$

Efectuăm substituția $x-1=t$. Când $x\to 1$, $t\to 0$. Prin urmare,

$$l=\lim_{t\to0}\frac{e^{(t+1)\ln2}-2}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{e^{t\ln2+\ln2}-2}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2\left(e^{t\ln2}-1\right)}{t}=\lim_{t\to o}\frac{2\cdot t\cdot\ln2}{t}=2\ln2.$$

3. *Regula lui L'Hospital* [2] reprezintă o metodă eficace de calculare a limitelor în cazul nedeterminărilor de tipul $\left|\frac{0}{0}\right|$ şi $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$. La înlocuirea numărătorului şi numitorului fracţiei prin derivatele lor, limita fracţiei nu se schimbă (în cazul când ultima există). Adeseori, regula lui L'Hospital se aplică de câteva ori consecutiv.

Exemplul 3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2.$

4. *Dezvoltarea funcţiilor în serii de puteri* reprezintă o treaptă mai avansată în calculul limitelor [1].

Exemplul 4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{ctgx}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{x\cdot\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}.$

Folosind dezvoltările standard ale funcţiilor $\sin x$ şi $\cos x$ în serii de puteri, obţinem în continuare:

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{x^2\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x^3}{3!}-\frac{4x^5}{5!}+\frac{6x^7}{7!}-\ldots}{x^3-\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{5!}-\ldots}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}-\frac{4x^2}{5!}+\frac{6x^4}{7!}-\ldots}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{6x^4}{5!}-\ldots}=\frac{1}{3}.$$

5. *Şirul numeric* e tot o funcţie, doar că definită pe mulţimea numerelor naturale N. Multe din procedeele de aflare a limitei funcţiei la infinit se aplică şi la aflarea limitei şirului. Un procedeu aparte, specific doar pentru unele şiruri, presupune folosirea sumelor integrale ale unei funcţii pe un segment. Dacă termenul ge-neral al şirului are forma unei sume integrale al funcţiei *f(x)* pe un careva interval închis, atunci limita acestui şir coincide cu integrala funcţiei *f(x)* pe acest interval.

Exemplul 5. Să se afle $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$

Termenul general a_n al şirului este suma din paranteze; el se transformă astfel:

$$a_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+1^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+n^2}=$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}.$$

Acum rămâne de observat, că sub forma obţinută termenul general reprezintă o sumă integrală a funcţiei $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ pe intervalul închis $[0,1]$. Acest interval are lungimea 1 şi a fost împărţit în *n* părţi egale, fiecare de lungime $\Delta x_i=\frac{1}{n}$. În rolul punctelor ξ_i s-au luat extremităţile din dreapta ale intervalelor. Cum limita cerută este limita sumelor integrale a funcţiei $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ pe intervalul închis $[0,1]$, ea coincide cu integrala definită a acestei funcţii pe $[0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\text{arctg } x\Big|_0^1=\text{arctg } 1-\text{arctg } 0=\frac{\pi}{4}.$$

Bibliografie

1. Берман, Г. Н. *Сборник задач и упражнений по курсу математического анализа.*М, Наука, 1975.
2. Şcerbaţchi, Ion. *Curs de analiză matematică. Vol.1.* Chişinău, Tehnica-Info, 2002.