SINTEZA REGULATOARELOR ÎN BAZA ESTIMATORULUI DE STARE DUPĂ CRITERIUL GRADULUI MAXIMAL DE STABILITATE

Ion Fiodorov, Artiom Motînga

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *În lucrare se propune o metodă de sinteză a regulatoarelor în baza estimatorului de stare elaborată după criteriul gradului maximal de stabilitate. Se prezintă algoritmul de sinteză a estimatorului de stare după metoda propusă. Eficacitatea algoritmului elaborat se demonstrează pe analiza unui exemplu de sinteză a regulatorului în spaţiul stărilor pentru modelul obiectului condus cu inerţie de gradul trei.*

Cuvinte-cheie: *sistem automat, spaţiul stărilor, variabile de stare, sinteza sistemelor, estimator de stare, gradul maximal de stabilitate.*

1. Introducere

O descriere mai generală şi mai eficientă a sistemelor se obţine dacă în modelul matematic, pe lângă informaţiile funcţionale intrare-ieşire se includ şi informaţii structurale prin intermediul unor variabile de stare $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$. Variabilele de stare sunt acele variabile care determină comportarea viitoare a unui sistem, când starea prezentă a sistemului şi intrările sunt cunoscute [1, 3].

Un sistem liniar invariant multivariabil este definit prin următoarele ecuaţii

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) = Ax + Bu, \\ y = g(x) = Cx + Du, \end{cases} \tag{1}$$

unde: $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times l}, C \in R^{p\times n}$ reprezintă nişte matrici constante.

Matricea *A* este matricea de stare, matricea *B* matricea de comandă, iar matricile *C* şi *D* sunt matrici ale coordonatelor de ieşire. Descrierea sistemului de ecuaţiile (1) se numeşte descriere în *spaţiul stărilor.*

În caz particular, pentru sisteme cu o singură intrare şi o ieşire, sistemele monovariabile, modelul matematic are următoarea formă

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = c^T x, \end{cases} \tag{2}$$

unde $A \in R^{n\times n}$ este matricea de stare, $b \in R^{n\times 1}$ - vectorul mărimilor de comandă, $c \in R^{1\times n}$ - vectorul mărimilor de ieşire.

În cazul sistemelor cu reprezentare în spaţiul stărilor regulatorul este de tip proporţional, iar algoritmul de reglare *u(t)* se descrie cu următoarea relaţie

$$u(t) = -k^T x(t), \tag{3}$$

unde k este vectorul parametrilor de acord cu dimensiunea $(n\times 1)$; x - vectorul de stare, $(n\times 1)$.

Dacă în ecuaţia (2) se substitue (3), atunci se obţine

$$\dot{x} = Ax + bu = Ax - bk^T x = [A - bk^T]x. \tag{4}$$

Din (4) reiese că comportamentul dinamic al sistemului este determinat de valorile proprii ale matricei $[A - bk^T]$.

Dacă ne limităm numai la legile de reglare liniare, staţionare atunci putem schimba proprietăţile dinamice ale sistemului închis numai dacă toate componentele vectorului de stare sunt accesibile pentru măsurare.

În practică, însă, nu toate componentele vectorului de stare sunt accesibile pentru măsurare. Pentru aceasta se utilizează estimatori de stare care reprezintă nişte sisteme dinamice ce furnizează la ieşire aprecierea stării sistemului real.

Un estimator de stare se descrie cu următoarea ecuaţie vectorial-matricială [1,3]

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - gc^T]\hat{x}(t) + gy(t) + bu(t), \quad (5)$$

unde g reprezintă vectorul de reacţie al estimatorului de stare.

Schema bloc structurală a unui sistem cu regulator în baza estimatorului de stare se prezintă în figura 1.

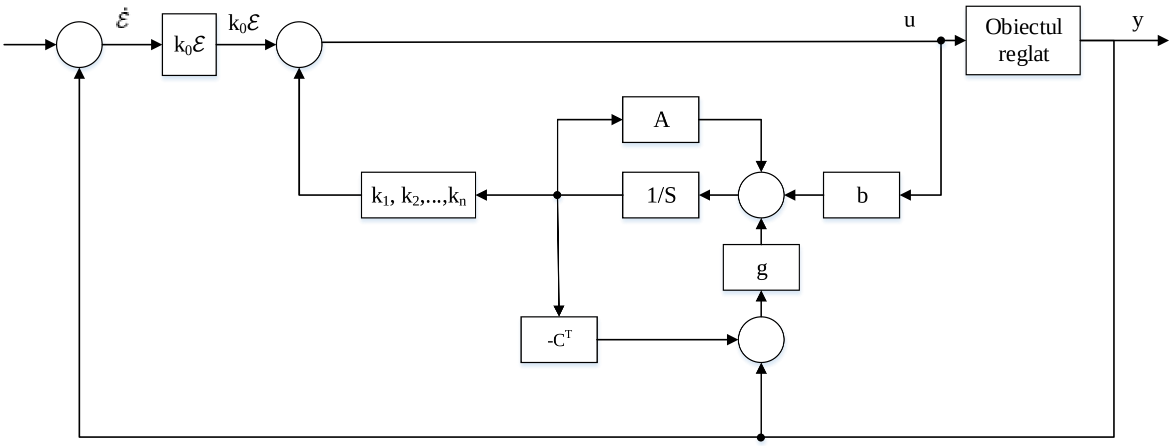

Fig. 1 Schema bloc structurală a sistemului automat cu estimator de stare.

2. Algoritmul de sinteză a regulatoarelor în spaţiul stărilor la modele de obiecte cu inerţie pentru SA cu grad maximal de stabilitate

Algoritmul presupune parcurgerea următorilor paşi [2].

1. Se obţine ecuaţia diferenţială normalizată după a_0 a sistemului monovariabil cu parametrii cunoscuţi

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + \alpha_1 y^{(1)}(t) + \alpha_0 y(t) = \beta_0 u(t).$$

2. Se determină ecuaţia diferenţială în formă vectorial-matricială în realizarea standard controlabilă

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu; \\ y = c^T x. \end{cases}$$

3. Ecuaţia obţinută la pasul doi se supune următoarelor transformări

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & O \\ -c^T & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \begin{bmatrix} x \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{b}} u + \begin{bmatrix} O \\ 1 \end{bmatrix} r; \\ y = c^T x, \end{cases}$$

unde $O^T = [0, 0, ..., 0]$.

4. Verificarea controlabilităţii sistemului $rang U = rang[\hat{b}, \hat{A}\hat{b}, ..., \hat{A}^n\hat{b}] = n + 1$.
   - În cazul în care condiţia se îndeplineşte sistemul este controlabil şi se trece la etapa următoare.
   - În caz contrar, sistemul nu poate fi condus cu ajutorul acestui algoritm.
5. Se proiectează structura regulatorului

$$u(t) = -[k_1, k_2, ..., k_n] \cdot [x_1, x_2, ..., x_n]^T + k_0\varepsilon, \ \dot{\varepsilon} = (r - y),$$

unde r şi y sunt mărimile de referinţă şi de ieşire respectiv.

6. Se obţine polinomul caracteristic al matricei A

$\varphi_A(p) = p^{n+1} + \alpha_{n-1}p^n + ... + \alpha_0 p + 0 = 0$.

7. Se determină ecuaţia caracteristică dorită, în conformitate cu criteriul gradului maximal de stabilitate.
   - Se introduce noţiunea de grad maximal de stabilitate J şi utilizând substituţia $p_i = -J \pm j\omega_i$, ecuaţia caracteristică obţinută la pasul 6 se descompune în $(n+1)$ factori liniari şi se aduce la forma

     $$\varphi_c(p) = \prod_{i=1}^{z}(p - j\omega_i + J)(p + j\omega_i + J)\prod^{r}(p + J) = p^{n+1} + q_n p^n + ... + q_1 p + q_0 = 0,$$

     unde z este numărul perechilor de rădăcini complexe; r - numărul de rădăcini reale; $(n+1) = 2z + r$ - gradul ecuaţiei caracteristice a sistemului; $q_i = f_i(J, \omega_i), i = (0,...,n)$,
   - Din egalitatea

     $$\alpha_1(a_0, a_{n-1}) = q_2(J, \omega_i), \omega_i = 0,$$

     după unele transformări, obţinem expresia pentru determinarea gradului maximal de stabilitate J al sistemului proiectat

     $$J = f(a_0, a_{n-1}),$$

     unde a_i sunt parametrii funcţiei de transfer a modelului obiectului reglat.
8. În conformitate cu coeficienţii ecuaţiilor caracteristice $\varphi_c(p)$, $\varphi_A(p)$ şi expresiile

   $$k_0 = q_0 / \beta_0;\ k_i = q_i - \alpha_{i-1},\ i = (1,...,n),$$

   se determină componentele vectorului de reacţie (parametrilor de acord)

   $$k_i = f_i(k, a_i, J, \omega_i), i = (0,...,n),$$

   unde parametrii liberi ω_i reprezintă părţile imaginare ale rădăcinilor complexe ale ecuaţiei caracteristice a sistemului sintetizat.
9. Alegerea valorilor proprii ale estimatorului

   $$\eta_i = -(5 \div 10)J,\ i = 1,...,n.$$

10. Determinarea polinomului caracteristic al estimatorului

    $$\varphi_E(s) = (s - \eta)^n = s^n + \gamma_{n-1}s^{n-1} + ... + \gamma_1 s + \gamma_0 = 0.$$

11. În conformitate cu coeficienţii ecuaţiilor caracteristice $\varphi_E(s)$, $\varphi_A(s)$ şi formulele

    $$g_i = \gamma_i - \alpha_i,\ i = 0,1, ...,(n-1)$$

    se calculează componentele matricei de stare a estimatorului

    $$E = A - gc^T.$$

12. Se proiectează structura regulatorului în conformitate cu următoarele expresii

    $$\dot{\hat{x}}(t) = E\hat{x}(t) + gy(t) + bu(t),$$

    $$u(t) = -[k_1, k_2, ..., k_n] \cdot [\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n]^T + k_0\varepsilon,$$

    unde $\dot{\varepsilon} = (r - y)$, r şi y sunt mărimile de referinţă şi de ieşire respectiv.

3. Sinteza regulatoarelor în spaţiul stărilor la modele de obiecte cu inerţie pentru SA cu grad maximal de stabilitate

Pentru a demonstra eficacitatea algoritmului prezentat mai sus ne referim la un studiu de caz. Presupunem că procesul tehnologic reglat se caracterizează cu modelul obiectului cu inerţie de ordinul trei

$$H(s)= \frac{7}{(2S+1)(4S+1)(6S+1)} = \frac{0.14}{S^3+0.91S^2+0.25S+0.021},$$

În conformitate cu algoritmul elaborat au fost calculate componentele vectorului de reacţie *k* a sistemului

$$J = \sqrt[n-1]{\frac{2*\alpha_1}{n^2+n}} = \sqrt[3-1]{\frac{2*0.25}{3^2+3}} = \sqrt[2]{\frac{0.5}{12}} = \mathbf{0.2},$$

$$k_0 = \frac{j^{n+1}}{\beta_0} = \frac{0.2^4}{0.14} = \frac{0.0016}{0.14} = \mathbf{0.011},$$

$$k_1 = \frac{n+1}{i!} j^{n+1-i} - \alpha_0 = \frac{4}{1} 0.2^3 - 0.021 = \mathbf{0.011},$$

$$k_2 = \frac{(n+1)n}{i!} j^{n+1-i} - \alpha_1 = \frac{4*3}{2} 0.2^2 - 0.25 = -\mathbf{0.015},$$

$$k_3 = \frac{(n+1)(n-1)n}{i!} j^{n+1-i} - \alpha_2 = \frac{24}{6} 0.2 - 0.91 = -\mathbf{0.115}.$$

Sa-u obţinute următoarele valori ale componentelor vectorului *g*

$$g_0 = \gamma_0 - \alpha_0 = 8 - 0.021 = \mathbf{7.979},$$

$$g_1 = \gamma_1 - \alpha_1 = 12 - 0.25 = \mathbf{11.745},$$

$$g_2 = \gamma_2 - \alpha_2 = 6 - 0.915 = \mathbf{5.085}.$$

În urma calculelor efectuate a fost obţinute următoarele expresii în formă vectorial-matricială care descriu structura regulatorului în baza estimatorului de stare

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.71 & 1 & 0 \\ -1.64 & 0 & 1 \\ -1.138 - & 0.25 & -0.91 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.85 \\ 11.75 \\ 7.979 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$u(t) = [k_1 k_2 k_3] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + k_0 \mathcal{E}.$$

Schema bloc structurală de simulare a sistemului proiectat se prezintă în figura 2.

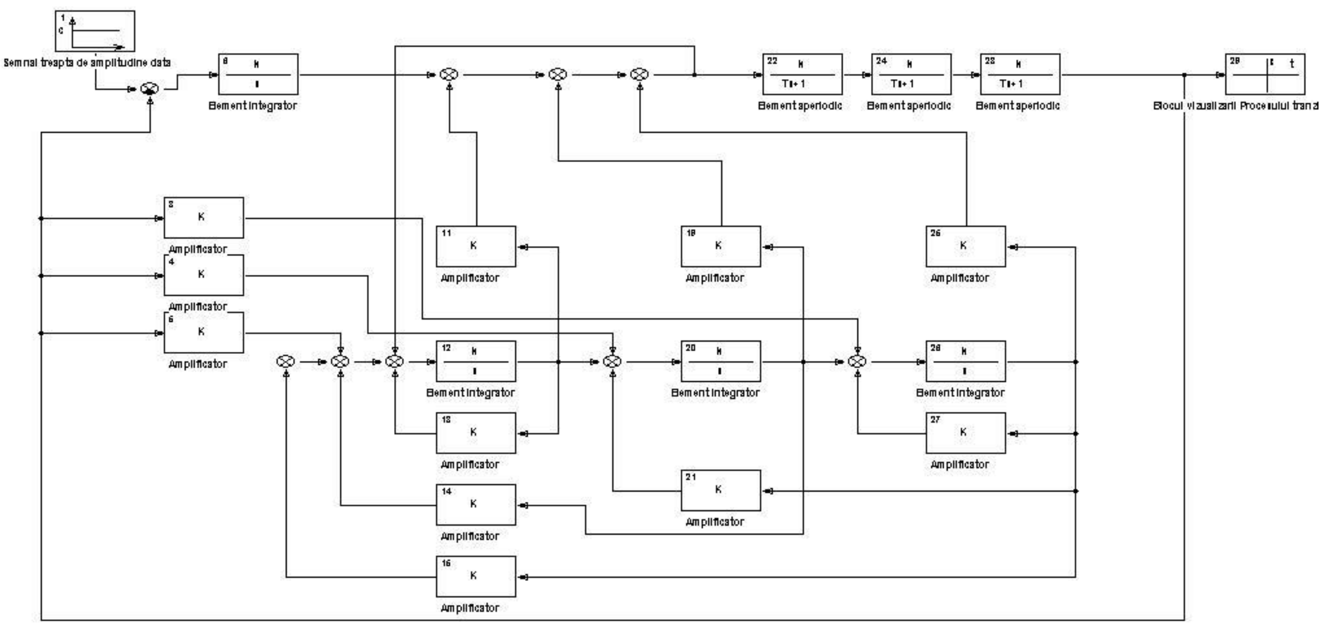

Fig. 2 Schema bloc structurală a sistemului automat

În figura 3 se prezină procesul tranzitoriu al sistemului proiectat.

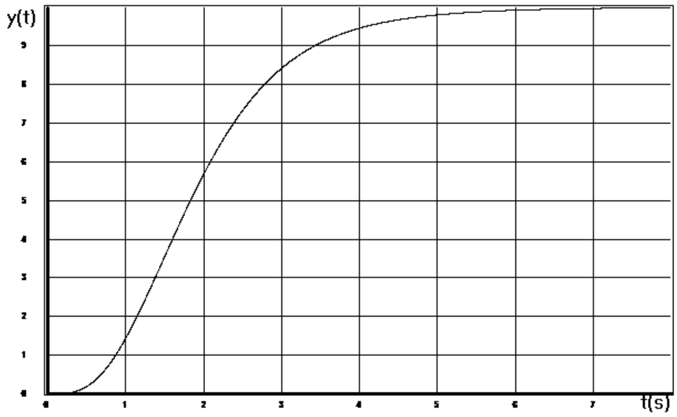

Fig. 3. Procesul tranzitoriu al sistemului automat proiectat

4. Concluzii

În lucrare se propune o metodă de sinteză a regulatoarelor în baza estimatorului de stare elaborată după criteriul gradului maximal de stabilitate.

Metoda elaborată de sinteză a regulatoarelor în spaţiul stărilor reprezintă o procedură analitică simplă, nu necesită un volum mare de calcule, nu impune restricţii asupra complexităţii obiectelor reglate şi poate fi aplicată pentru diverse tipuri de modele de obiecte: cu inerţie de grad arbitrar; cu inerţie şi astatism; cu inerţie şi timp mort; cu inerţie, astatism şi timp mort.

Parametrii de acord ai regulatorului $k_i = f(k, a_i, J, \omega_i)$, expresiile pentru calculul cărora sunt determinate în urma aplicării acestor algoritmi, depind de parametrii cunoscuţi ai obiectului reglat şi totodată de gradul maximal de stabilitate al sistemului J şi partea imaginară a rădăcinilor ecuaţiei caracteristice ω_i. În urma variaţiei parametrilor liberi J şi ω_i putem impune sau optimiza performanţele sistemului automat proiectat: gradul de amortizare ψ, suprareglajul $\sigma\%$ sau durata regimului tranzitoriu t_r.

Sistemul sintetizat în baza metodei elaborate posedă performanţe ridicate în ceea ce priveşte stabilitatea, suprareglajul şi durata regimului tranzitoriu.

Bibliografie

1. Pozna C. Teoria sistemelor automate. – Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2004. – 330 p.
2. Fiodorov I., Putere A.. Sinteza sistemelor dinamice în spaţiul stărilor cu grad maximal de stabilitate / *Proceedings of the 7th International Conference on "Microelectronics and Computer Science"*, Chişinău, sep. 22-24, 2011, Vol. 1, pp. 224-227.
3. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М: Наука, 1976. 424 с.