ALGEBRE MONOIDALE, SKEW POLINOAME ŞI DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

Elena P. Cojuhari

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract:*A type of generalized derivation consisting of a collection of self mappings of a ring associated with a monoid is described. The notion of a monoid algebra in our context extends those of a group ring, a skew polynomial ring, Weyl algebra and other related ones.*

Cuvinte cheie: *Derivations, monoid algebras, free algebras, skew polynomial rings.*

Mathematics Subject Classification: Primary 16S36; Secondary 13N15, 16S10.

În 1 Smits a propus o extindere al teoriei inelelor de skew polinoame, inițiate de Ore în [2]. În 1 inele de skew polinoame peste un câmp necomutativ K au fost considerate cu o regulă de permutare definită prin

$$x \cdot a = a_1 x + \ldots + a_r x^r,$$

unde $a_i \in K (i = 1,...,n)$ fiind dependente de elementul dat $a, a \in K.$ Astfel se pot defini aplicații

$$\sigma_i : \quad a \to a_i \quad (i = 1,\ldots,r)$$

care, datorită structurii de inel pe mulțimea de skew polinoame, posedă anumite proprietăți specifice similare celora ale operațiilor de derivare. Inelul de skew polinoame obținut în acest mod, pentru cazul particular al regulei de permutare

$$x \cdot a = \sigma(a)x + \delta(a), \qquad (a \in K),$$

este nu altceva decât inelul de polinoame lui Ore [2], σ fiind un automorfizm iar δ o $(1,\sigma)$-derivată ale câmpului K.

În 3 a fost propusă o tratare generală ale derivatelor ale unui inel necomutativ A în care se cuprinde construcțiile menționate anterior. Se introduce, în mod axiomatic, o familie de aplicații $\sigma = (\sigma_{xy})_{x,y \in G}$ definite pe inelul A (de asemenea, cu valori în A) şi indexate prin elementele unui monoid multiplicativ dat G. Aplicațiile $\sigma_{xy} : A \to A \ (x, y \in G)$ sunt definite astfel încât următoarele proprietăți (axiomele pentru familia σ) sa fie verificate

$(i)\ \sigma_{x,y}(a+b) = \sigma_{x,y}(a) + \sigma_{x,y}(b) \quad (a,b \in A; x, y \in G);$

$(ii)\ \sigma_{x,y}(ab) = \sum_{z \in G} \sigma_{x,z}(a)\sigma_{z,y}(b) \quad (a,b \in A; x, y \in G);$

$(iii)\ \sigma_{xy,z} = \sum_{uv=z} \sigma_{x,u} \circ \sigma_{y,v} \quad (x, y, z \in G);$

$(iv_1)\ \ \sigma_{x,y}(1) = 0 \ \ (x \neq y; x, y \in G);\ (iv_2)\ \ \sigma_{x,x}(1) = 1\ (\forall x \in G).$

$(iv_3)\ \ \sigma_{e,x}(a) = 0 \ \ (x \neq e; x \in G); \quad (iv_4)\ \ \sigma_{e,e}(a) = 1\ (\forall a \in A).$

Datorită proprietăților (i) - (iv), familia $\sigma = (\sigma_{x,y})_{x,y \in G}$ se poate numi *o structură diferențială* pe inelul A sau, pe scurt, D-structură [6].

Având la dispoziția structura diferențială σ se poate construi în mod univoc un inel $A < G >$ numit în [3] algebră monoidală. Elementele α ale inelului $A < G >$ se pot reprezenta ca sume de forma

$$\alpha = \sum_{x \in G} a_x \cdot x$$

Operația de multiplicare a ineluilui $A < G >$ se defineşte prin formula

$$\alpha\beta = \sum_{x,y \in G} (a_x \cdot x)(b_y \cdot y)$$

pentru $\alpha = \sum_{x \in G} a_x \cdot x, \beta = \sum_{y \in G} b_y \cdot y \in A < G >,$ unde se notează

$$(a \cdot x)(b \cdot y) = \sum_{z \in G} a\sigma_{x,z}(b) \cdot zy \; (a, b \in A; \quad x, y \in G).$$

Se arată că inelul $A < G >$ este o G -algebră liberă peste inelul A. Mai exact, se arată că $A < G >$ este un obiect universal al unei categorii C_σ asociate, în mod natural, structurii diferențiale σ.

Algebrele grupoidale, ce corespund cazului comutativ, inelele de polinoame a lui Ore cât şi generalizările propuse de Smits se cuprind în descrierea G -algebrei $A < G >$. De asemenea, algebrele lui Weyl sunt cazuri particulare ale algebrelor monoidale asociate unei structuri diferențiale definite prin axiomele (i) - (iv).

Bibliografie

1. Smits T.H.M. *Skew polynomial rings.*Indag. Math., 1968, **30**, p. 209--224.
2. O. Ore *Theory of non-commutative polynomials.* Annals of Math. Nr. 34 (1933), p. 480-508.
3. Cojuhari E., *Monoid algebras over non-commutative rings,* Intern. Electronic Journal of Algebra, Volume 2 (2007), p. 28-53.
4. Lang S., *Algebra,* Addison-Wesley, (1970).
5. Cohn P.M. *Free rings and their relations,* Academic Press, London, New-York, 1971.
6. E. P. Cojuhari and B. J. Gardner *Generalized higher derivations,* Bull. Austral. Math. Soc., no. **86** (2012), p. 266-281.
7. Cojuhari E. *The property of universality for some monoid algebras over non-commutative rings.* Buletinul A.S.R.M., Matematica, 2006, no. **2(51)**, p. 102-105.
8. Cojuhari E. *Structuri diferențiale şi algebra Weyl.* Conferința Tehnico-Ştiințifică a colaboratorilor, doctoranzilor şi studenților, UTM, (2008)
9. Smits T.H.M. *Nilpotent S-derivations.*Indag. Math., 1968, **30**, p. 72—86