

UNELE PROCEDEE DE AFLARE A LIMITEI FUNCȚIEI

Autor: Irina GONȚA
Coordonator științific: conf. dr., Ion Leah

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: The paper is a synthesis of the main methods for finding the limits of functions. These are: two remarkable limits (and as a consequence, the use of equivalent infinitesimal functions), l'Hospital's rule, and a more sophisticated method – the power series expansion of functions. In the end, is analyzed the limit of the numerical sequence having the general term equal to the integral sum of a certain function over a certain interval.

Cuvinte cheie: limita funcției, nedeterminări, limite remarcabile, înfîniți mici echivalenți, dezvoltare în serie de puteri, sume integrale.

Limita funcției este o noțiune fundamentală în matematică. Ei i se datorează apariția și dezvoltarea analizei matematice. Prin intermediul ei se definesc derivatele și integralele, spectrul de aplicații ale cărora pare a fi nelimitat. Pentru a fi aplicată, limita funcției trebuie calculată. Definiția limitei nu este constructivă, în sensul că ea nu conține și calea de aflare a limitei. Din acest motiv, nu există un algoritm standard de aflare a limitei. Ne vom opri la câteva metode de calculare a limitei funcției, diferite de cele elementare. Acestea vor fi: două limite remarcabile împreună cu consecințele lor, regula lui l'Hospital, dezvoltarea funcțiilor în serie de puteri, folosirea sumelor integrale.

1. *Prima limită remarcabilă:* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Această limită se aplică în majoritatea cazurilor, în care figurează funcții trigonometrice. Din prima limită remarcabilă rezultă 4 perechi importante de înfîniți mici echivalenți:

$$\text{Pentru } x \rightarrow 0 : 1. \sin x \sim x; 2. \operatorname{tg} x \sim x; 3. \operatorname{arcsin} x \sim x; 4. \operatorname{arctg} x \sim x. \quad (1)$$

La calcularea limitelor, numărătorul și numitorul fracției pot fi înlocuiți prin înfîniți mici echivalenți, de obicei, mai simpli.

$$\begin{aligned} \text{Exemplul 1. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \cdot \operatorname{arctg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{x \cdot x \cdot (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2(1 + \sqrt{\cos 0})} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. *Limita a doua remarcabilă:* $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, sau, în mod echivalent, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Aproape în exclusivitate, ea se aplică în cazul nedeterminărilor de tipul $|1^\infty|$. Din $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ mai rezultă două perechi de înfîniți mici echivalenți, care se adaugă celor patru din (1):

$$\text{Pentru } x \rightarrow 0 : 5. e^{x-1} \sim x; 6. \ln(1+x) \sim x. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Exemplul 2. a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - e^{-x})}{e^{x^3+1} - e} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2[(e^x - 1) - (e^{-x} - 1)]}{e^{x^3+1} - e} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^x - 1)}{e(e^{x^3} - 1)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(e^{-x} - 1)}{e(e^{x^3} - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x}{e \cdot x^3} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot (-x)}{e \cdot x^3} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x \ln 2} - 2}{\ln[1+(x-1)]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{[(x-1)+1] \ln 2} - 2}{\ln[1+(x-1)]} = l. \end{aligned}$$

Efectuăm substituția $x - 1 = t$. Când $x \rightarrow 1$, $t \rightarrow 0$. Prin urmare,

$$l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{(t+1)\ln 2} - 2}{\ln(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t\ln 2 + \ln 2} - 2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(e^{t\ln 2} - 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cdot t \cdot \ln 2}{t} = 2 \ln 2.$$

3. *Regula lui L'Hospital* [2] reprezintă o metodă eficientă de calculare a limitelor în cazul nedeterminărilor de tipul $\left| \frac{0}{0} \right|$ și $\left| \frac{\infty}{\infty} \right|$. La înlocuirea numărătorului și numitorului fracției prin derivatele lor, limita fracției nu se schimbă (în cazul când ultima există). Adeseori, regula lui L'Hospital se aplică de câteva ori consecutiv.

Exemplul 3.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

4. *Dezvoltarea funcțiilor în serii de puteri* reprezintă o treaptă mai avansată în calculul limitelor [1].

Exemplul 4.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctgx}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x \cdot \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x}.$$

Folosind dezvoltările standard ale funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$ în serii de puteri, obținem în continuare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) - x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right)}{x^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x^3}{3!} - \frac{4x^5}{5!} + \frac{6x^7}{7!} - \dots}{x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} - \frac{4x^2}{5!} + \frac{6x^4}{7!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{6x^4}{5!} - \dots} = \frac{1}{3}.$$

5. *Șirul numeric* este tot o funcție, doar că definită pe mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} . Multe din procedeele de aflare a limitei funcției la infinit se aplică și la aflarea limitei șirului. Un procedeu aparte, specific doar pentru unele șiruri, presupune folosirea sumelor integrale ale unei funcții pe un segment. Dacă termenul general al șirului are forma unei sume integrale ale funcției $f(x)$ pe un careva interval închis, atunci limita acestui șir coincide cu integrala funcției $f(x)$ pe acest interval.

Exemplul 5. Să se afle
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

Termenul general a_n al șirului este suma din paranteze; el se transformă astfel:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{n^2 + n^2} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2}. \end{aligned}$$

Acum rămâne de observat, că sub forma obținută termenul general reprezintă o sumă integrală a funcției

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pe intervalul închis $[0,1]$. Acest interval are lungimea 1 și a fost împărțit în n părți egale,

fiecare de lungime $\Delta x_i = \frac{1}{n}$. În rolul punctelor ξ_i s-au luat extremitățile din dreapta ale intervalelor. Cum

limita cerută este limita sumelor integrale a funcției $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pe intervalul închis $[0,1]$, ea coincide cu

integrala definită a acestei funcții pe $[0,1]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Берман, Г. Н. *Сборник задач и упражнений по курсу математического анализа*. М, Наука, 1975.
2. Șcerbațchi, Ion. *Curs de analiză matematică. Vol.1*. Chișinău, Tehnica-Info, 2002.