FUNCȚII SPECIALE EULER ŞI APLICAȚII

Ecaterina SAVCIUC, Aurica POPESCU
Coordonator Ştiințific: Aurica Popescu

Universitatea Tehnică a Moldovei

***Abstract**:Leonhard Euler a creat teoria funcțiilor speciale –cunoscute ca integralele Euler: Gamma funcția şi Beta funcția. Ele generalizează funcția factorial la valori neîntregi şi complexe ale lui n. Funcțiile speciale sunt tabulate şi reprezintă componente a mai multor distribuții de probabilitate cu o largă aplicabilitate în combinatorică, teoria numerelor, teoria probabilității şi statistică. Funcțiile speciale au o importanță mare prin faptul că cu ajutorul lor se calculează rapid clase de integrale definite şi improprii.*
***Cuvinte cheie**: Gamma funcție, Beta funcție, legătura dintre Gamma şi Beta funcție şi aplicații.*

Funcția Gamma, introdusă şi studiată de către Leonhard Euler reprezintă o generalizare a conceptului de factorial la numerele reale şi la numerele complexe.
Gamma funcție sau integrala Euler de tip II:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{p-1}dx\,, \quad (p>0) \quad (1.1)$$

care este o integrală improprie cu limita de sus infinit şi pentru p<1 la limita de jos. Gamma funcția este 0 integrală convergentă.
Integrând prin părți primim prima formulă de reducere pentru Gamma funcție:

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)\ (p>0) \quad (1.2)$$

Remarcăm: $\Gamma(1)=1$ şi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

Pentru n-natural $\Gamma(n+1)=1\cdot 2\cdot 3 \ldots \cdot n=n\,!$. (1.3)

Efectuând substituția $x=t^2$ şi apoi schimbând t cu x obținem a doua formulă de reducere pentru Gamma funție: $\Gamma(p)=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{2p-1}dx\ (p>0)$ (1.4)

Beta funcție, numită integrala Euler de primul tip, este o funcție specială definită de:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\ (p>0,q>0) \quad (2.1)$$

Pentru p<1 2.1 reprezintă integrală improprie cu limita inferioară, iar pentru p>1 cu limita superioară.

Efectuând substituția $x=\cos^2\varphi$ primim: (Noile limite $0\to\frac{\pi}{2}$)

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi d\varphi\ (p>0,q>0) \quad (2.2)$$

numită a doua exprimare Beta funcția.

Substituind în 2.1 $x=\frac{t}{t+1}$, Beta funcție poate fi prezentată ca integrală improprie, numită a treia exprimare a funcției speciale:

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx \quad (2.3)$$

Parametrii p,q sunt simetrici: $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$ (2.4)

Pentru n şi m naturali:

$$\mathrm{B}(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \tag{2.5}$$

Relaţia dintre Beta şi Gamma:

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{2.6}$$

Pentru cazul $\mathrm{B}(p,1-p)=E(p)$ (2.7)

unde $\mathrm{E}(p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

Funcţia Gamma şi Beta generalizează funcţia factorial la valori neîntregi şi complexe ale lui n. Funcţiie speciale sunt componente a mai multor distribuţii de probabilitate şi deci au aplicaţii în combinatorică, teoria numerelor, teoria probabilităţii şi statistică.

Analizăm exemple de calcul a integralelor cu aplicarea funcţiilor speciale:

1. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{4}}}{(1+x)^2}dx=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)}=\frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$.

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{5}{2}}x\cdot\cos^{\frac{3}{2}}x\cdot dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cdot\cos^{\frac{1}{2}}x\cdot 2\sin x\cdot\cos x\cdot dx=$(Substituţia: $\sin^2 x=z$, cu limitele noi $0\to 1$)=

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 z^{\frac{3}{4}}(1-z)^{\frac{1}{4}}dz=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 z^{\frac{7}{4}-1}(1-z)^{\frac{5}{4}-1}=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{5}{4}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)}=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)}=\frac{3}{64}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},1-\frac{3}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{64}\pi.$$

3. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a\int\limits_0^a x^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=$(Subtituţia: $\left(\frac{x}{a}\right)^2=t$, limitele noi $0\to 1$)=

$$=\frac{a^4}{2}\int\limits_o^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{a^4}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt=\frac{a^4}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)=\frac{a^4}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)}=\frac{\pi a^4}{16}.$$

Literatura:

1.E.Artin The Gamma Function New York, Holt ,1994.

2.O.Stănăşilă Analiza matematică. Funcţii speciale Bucureşti, 2001.

3.Никифоров А. Ф. Основы теории специальных функций Москва, Наука ,2004