DESPRE ORDINUL SUBSTITUȚIILOR DE INVERSARE A UNEI BUCLE TERNARE CU PROPRIETATE DE INVERSARE

Autor: Leonid URSU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract:*Se formulează şi se demonstrează noi proprietăți ale substituțiilor de inversare pentru o buclă ternară cu proprietatea de inversare şi cu o unitate e. Aceste proprietăți se aplică la determinarea ordinului sistemului de inversare şi a matricei de inversare pentru astfel de buclă.*

Cuvintele cheie**:** *Cuasigrup ternar cu proprietatea de inversare (*$3-IP$ *- cuasigrup), unitate,buclă ternară (* $3-IP$*-buclă), substituții de inversare,sistem de inversare, matrice de inversare, substituții* I_{ij}*, matricea* $\left[I_{ij}\right]$.

Cuasigrupul ternar $Q(A)$ se numeşte cuasigrup cu proprietate de inversare $(3-IP-cuasigrup)$ $[1]$, dacă pe mulțimea finită Q există substituțiile ν_{ij} ; $i, j \in \overline{1,3}$;

$\nu_{ii} = \nu_{ii+1} = \mathrm{E}$ - substituție unitară, astfel încât sunt satisfăcute egalitățile:

$$A(A(x_1^3),\, \nu_{12}x_2,\, \nu_{13}x_3) = x_1$$

$$A\left(\nu_{21}x_1, A(x_1^3),\, \nu_{23}x_3\right) = x_2$$

$$A(\nu_{31}x_1,\, \nu_{32}x_2,\, A(x_1^3)) = x_3$$

pentru orice $x_1^3 \in Q^3$.

ν_{ij} - se numesc substituții de inversare, iar matricea $\left[\nu_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon & \nu_{12} & \nu_{13} & \varepsilon \\ \nu_{21} & \varepsilon & \nu_{23} & \varepsilon \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \varepsilon & \varepsilon \\ & & & \end{bmatrix}$ se numeşte matrice de inversare pentru $Q(A)$, unde $i \in \overline{1,3},\ j \in \overline{1,4}$. Fiecare linie ale acestei matrice se numeşte sistem de inversare pentru cuasigrupul $Q(A)$. Dacă toate $\nu_{ij} = \varepsilon$, atunci $Q(A)$ se numeşte cuasigrup total simetric (TS - cuasigrup).

Elementul $e \in Q$ se numeşte unitate pentru $3-IP$ - cuasigrupul $Q(A)$, dacă

$A(x,e,e) = A(e,x,e) = A(e,e,x) = x$ pentru orice $x \in Q.$

Cuasigrupul ternar cu unitate se numeşte buclă ternară. Substituțiile I_{ij} pe mulțimea Q sunt definite de egalitățile:

$A(e^{i-1}, x, \overset{j-i-1}{e}, I_{ij}, x, \overset{n-j}{e}) = e$ pentru orice $x \in Q$ şi $i, j \in \overline{1,3}$.

Evident că $I_{ij}e = e$ pentru orice $i, j \in \overline{1,3}$.

Considerăm matricea $\left[I_{ij}\right]=\begin{bmatrix} \varepsilon & I_{12} & I_{13} & \varepsilon \\ I_{21} & \varepsilon & I_{23} & \varepsilon \\ I_{31} & I_{32} & \varepsilon & \varepsilon \\ & & & \end{bmatrix}$,

unde $i\in\overline{1,3}$, $j\in\overline{1,4}$, $J_{ii}=J_{i4}=$E [2]

Ordinul sistemului de inversare a unei $3-IP$ - bucle este cel mai mic multiplu comun al ordinelor substituțiilor de inversare din acest sistem. Ordinul matricei de inversare a unei $3-IP$ - bucle este cel mai mic multiplu comun a ordinelor sistemelor de inversare ale acestei matrice [3]

<u>Propoziția 1</u>**:**Pentru orice $3-IP$ - buclă $Q(A)$ cu unitatea *e* şi cu matricea de inversare $\left[\nu_{ij}\right]$:

$$\nu_{12}^{2n-1}e=e\Leftrightarrow\nu_{13}^{2n-1}e=e$$

$$\nu_{21}^{2n-1}e=e\Leftrightarrow\nu_{23}^{2n-1}e=e$$

$$\nu_{31}^{2n-1}e=e\Leftrightarrow\nu_{32}^{2n-1}e=e$$

Pentru orice $n\in N$

<u>*Demonstrație:*</u> Această proprietate rezultă din următoarele egalități evidente:

$$A\left(e,\nu_{12}^{2n-1}e,\nu_{13}^{2n-1}e\right)=e$$

$$A\left(\nu_{21}^{2n-1}e,\ e,\nu_{23}^{2n-1}e\right)=e$$

$$A\left(\nu_{31}^{2n-1},\nu_{32}^{2n-1}e,\ e\right)=e$$

<u>Propoziția 2.</u>Pentru orice $3-IP$ - buclă $Q(A)$ cu matricea de inversare $\left[\nu_{ij}\right]$ şi cu unitatea *e*:

$$\nu_{12}^{2n}x=x\Leftrightarrow\nu_{13}^{2n}x=x$$

$$\nu_{21}^{2n}x=x\Leftrightarrow\nu_{23}^{2n}x=x$$

$$\nu_{31}^{2n}x=x\Leftrightarrow\nu_{32}^{2n}x=x$$

Pentru orice $n\in N$ şi orice $x\in Q$

Demonstrație: Fie $\nu_{12}^{2n}x = x$, atunci $\left(e, \nu_{12}^{2n}e, \nu_{13}^{2n}x\right) = x \Rightarrow \nu_{13}^{2n}x = x$. Fie $\nu_{13}^{2n}x = x$. Atunci, din $\left(e, \nu_{12}^{2n}x, \nu_{13}^{2n}e\right) = x \Rightarrow \nu_{12}^{2n}x = x$. Analogic se demonstrează şi celelalte echivalențe.

Propoziția 3. Matricea de inversare a unei $3-IP$ - bucle, care nu este $3-TS$ - buclă, are numai ordin par.

Demonstrație: Presupunem contrariu că matricea de inversare $\left[\nu_{ij}\right]$ pentru orice $3-IP$ - buclă $Q(A)$ are ordin impar, adică $\left[\nu_{ij}^{2n-1}\right]$ = [E]. Aşa cum $\left[\nu_{ij}^{2n-1}\right]$ tot este matrice de inversare pentru $Q(A)$, atunci $Q(A)$ este $3-TS$ - buclă. Contrazicerea obținută demonstrează propoziția.

Propoziția 4. Dacă matricea de inversare $\left[\nu_{ij}\right]$ a $3-IP$ - buclei $Q(A)$ cu unitatea *e* are ordinul $4n-2$, $n \in N$, atunci

$$A\left(e, \nu_{12}^{2n-1}e, \nu_{13}^{2n-1}e\right) = A\left(\nu_{12}^{2n-1}e, e, \nu_{13}^{2n-1}e\right) = A\left(\nu_{13}^{2n-1}e, \nu_{12}^{2n-1}e, e\right) = e$$

$$A\left(\nu_{21}^{2n-1}e, e, \nu_{23}^{2n-1}e\right) = A\left(e, \nu_{21}^{2n-1}e, \nu_{23}^{2n-1}e\right) = A\left(\nu_{21}^{2n-1}e, \nu_{23}^{2n-1}e, e\right) = e$$

$$A\left(\nu_{31}^{2n-1}e, \nu_{32}^{2n-1}e, e\right) = A\left(\nu_{31}^{2n-1}e, e, \nu_{32}^{2n-1}e\right) = A\left(e, \nu_{32}^{2n-1}e, \nu_{31}^{2n-1}e\right) = e$$

Demonstrație: Din $A\left(\nu_{13}^{2n-1}e, \nu_{12}^{2n-1}e, e\right) = e' \Rightarrow A\left(e', e, \nu_{13}^{2n-1}e\right) = \nu_{13}^{2n-1}e$. Comparând cu egalitatea adevărată $A\left(e, e, \nu_{13}^{2n-1}e\right) = \nu_{13}^{2n-1}e$, obținem $e' = e$. Analogic se demonstrează şi celelalte egalități.

Propoziția 5. Dacă pentru $3-IP$ - bucla $Q(A)$ cu matricea de inversare $\left[\nu_{ij}\right]$ şi unitatea *e* există $n \in N$, astfel încât exact pentru o substituție de inversare a fiecărui sistem de inversare $\nu_{ij}^{2n-1}e = e$, atunci $Q(A)$ are şi matricea de inversare $\left[I_{ij}\right]$.

Demonstrație: Fie $\nu_{12}^{2n-1}e = e \Leftrightarrow \nu_{13}^{2n-1}e = e$. Atunci

$$I_{21}x = \left(e, \nu_{12}^{2n-1}x, \nu_{13}^{2n-1}e\right) = \nu_{12}^{2n-1}x$$

$$I_{31}x = \left(e, \nu_{12}^{2n-1}e, \nu_{13}^{2n-1}x\right) = \nu_{13}^{2n-1}x$$

Analogic se demonstrează că $I_{ji}x = \nu_{ij}^{2n-1}x$. Deci $\left[\nu_{ij}^{2n-1}\right] = \left[I_{ji}\right] = \left[I_{ij}^{-1}\right]$ este matrice de inversare pentru $Q(A)$. Rezultă $\left[I_{ij}\right]$ tot este matrice de inversare pentru $Q(A)$.

Bibliografie

1. Belousov V.D. *n – Cuasigrupuri*. Ed. Ştiința. Chişinău, 1972 (în limba rusă).

2. Ursu L. *n – Bucle cu proprietate de inversare.* Cercetări matematice. Ed.113, p.108-118. Ştiința. Chişinău, 1990. (în limba rusă).
3. Leonid A. Ursu. *About one of inverse matrices of a nonsimmetric n-IP-loop.* The 20^{th} Conference on applied and industiral mathemathics. ROMAI. Communications. Chişinău, august 22-25, 2012, pag.216.