STUDIU PRIVIND AMPLIFICAREA OSCILAȚIILOR PARAMETRICE

Autori: Mihai ȚOPA, Mihaela SULTAN
Universitatea Tehnică a Moldovei

Ideea principală: *Oscilațiile unui sistem se amplifică variind periodic într-un anumit ritm şi cu o anumită fază parametrii lui.*

Cuvinte cheie: *pendul matematic, oscilații parametrice, factor de amplificare a amplitudinii.*

Oscilațiile parametrice apar cînd variază caracteristicile sistemului. drept exemplu de un astfel de sistem oscilant poate servi un scrînciob legănat de un om, care se aşează atunci cînd scrînciobul este maxim abătut de la poziția de echilibru şi se ridică cînd scrînciobul trece prin poziția de echilibru, astfel schimbă periodic poziția centrului de greutate al sistemului.

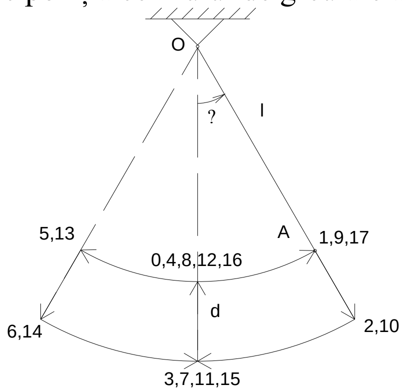

Fig. 1

Ecuația diferențială a mişcării pendulului de lungime l (fig. 1) este $ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0$
Se consideră oscilațiile mici încît sinφ=φ după transformări ecuația diferențială devine

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,\; k = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1}$$

Pentru pendulul de lungime *l+d* ecuația diferențială este

$$\ddot{\varphi} + k_1^{\,2}\varphi = 0, \quad k_1 = \sqrt{\frac{g}{l+d}} \tag{2}$$

Parametrul *k* în (1) şi (2) variază în trepte, unde $T_1 = T_3 - T_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$, iar

$T_2 - T_1 = T_4 - T_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{g}}(\sqrt{l+d} - \sqrt{l})$. Se consideră *d«l.*

Aplicație. Fie datele inițiale: m = 20 kg, l = 2 m, d = 0.2 m, $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 0.386\ s^{-1}$.

Soluția generală a ecuației (1) este $\varphi = A\sin(kt+\alpha)$ şi $\dot{\varphi} = Ak\cos(kt+\alpha)$. Legea mişcării va fi $\varphi = 0.1744\sin(2.214t)$. În poziția 1 avem $\dot{\varphi}_1 = 0$ şi deducem $\cos(2.214t_1) = 0$. Obținem momentul de timp cînd pendulul ajunge în poziția 1 $t_1 = \frac{\pi\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} = 0.7096$ s. Aplicăm teorema momentului cantității de mişcare şi, deoarece momentul forțelor ce acționează asupra pendulului în raport cu punctul 0 (fig. 2) in poziția de echilibru este nul, avem

$$m(l+d)^2\dot{\varphi}_3 = ml^2\dot{\varphi}_4 \tag{3}$$

şi viteza unghiulară $\dot{\varphi}_4 = \dot{\varphi}_3\left(\frac{l+d}{l}\right)^2 = -0.4454\,\mathrm{s}^{-1}$.

Procedînd analogic în continuare obținem rezultatele pe care le înscriem în tabel.

Nr. poziției i	φ_i, rad	$\dot{\varphi}_i$, s^{-1}	$\alpha_i = \alpha_{i+1}$, rad	t_i, s	$E_i = E_{i+1}$, J
0 1	0 0.1744	0.386 0	0	0 0.7096	5.96
4 5	0 0.2012	-0.4454 0	-0.0768	1.4539 2.1635	7.93
8 9	0 0.2321	0.5138 0	-0.1533	2.9077 3.6173	10.56
12 13	0 0.2678	-0.5927 0	-0.2298	4.3615 5.0711	14.05
16 17	0 0.3089	0.6839 0	-0.3066	5.8154 6.5250	18.71

Observăm: perioada oscilațiilor $T = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{l} + \sqrt{l+d}\right) = 2.9077$ s şi $\frac{\dot{\varphi}_8}{\dot{\varphi}_0} = \frac{\dot{\varphi}_{16}}{\dot{\varphi}_8} = \left(\frac{l+d}{l}\right)^3 = 1.331$

Am obținut relația dintre vitezele unghiulare ale pendulului după n perioade şi cea inițială

$$\omega_{nT} = \omega_0 \left(\frac{l+d}{l}\right)^{3n} \tag{4}$$

unde n = 0, 1, 2, … . Energia pendulului după n perioade se exprimă prin energia inițială astfel:

$$E_{nT} = \frac{ml^2 \omega_{nT}^{\ 2}}{2} = \frac{ml^2 \omega_0^{\ 2}}{2}\left(\frac{l+d}{l}\right)^{6n} = E_0 \left(\frac{l+d}{l}\right)^{6n} \tag{5}$$

Sau poate fi adusă la forma $E_{nT} = E_0 e^{6\ln\frac{l+d}{l}}$. De asemenea, observăm că raportul energiei la pătratul amplitudinii este o mărime constantă. În cazul dat

$$\frac{E_1}{A_1^{\ 2}} = \frac{E_9}{A_9^{\ 2}} = \frac{E_{17}}{A_{17}^{\ 2}} = 196 \tag{6}$$

Amplitudinea după n perioade poate fi calculată cu formula

$$A_n = \frac{\sqrt{E_0}}{14}\left(\frac{l+d}{l}\right)^{3n} = \varphi_1 \left(\frac{l+d}{l}\right)^{3n} \tag{7}$$

Raportul a două amplitudini consecutive

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{\varphi_1 \left(\frac{l+d}{l}\right)^{3(n+1)}}{\varphi_1 \left(\frac{l+d}{l}\right)^{3n}} = \left(\frac{l+d}{l}\right)^3 = 1.331 \tag{8}$$

este o mărime supraunitară, care poartă denumirea de factor de amplificare a amplitudinii. După două oscilații amplitudinea creşte, în cazul dat, de la 10˚ la 17.9˚.

Concluzie. Oscilațiile parametrice apar odată cu schimbarea poziției relative a centrului de greutate al sistemului. Variația periodică cu o anumită frecvență şi fază a parametrilor unui sistem mecanic oscilant conduce la creşterea amplitudinilor oscilațiilor. S-au obținut energia şi amplitudinea oscilațiilor parametrice ca funcții de timp.

Bibliografie:

1. Caraganciu V., Colpagiu M., Țopa M. Mecanica teoretică, Editura „Ştiința”, Chişinău, 1994, 471p.
2. Ландау Л., Ахиезер А., Лифшиц Е., Курс общей физики. Наука, М: 1969, 400с.
3. Пановко Я., Губанова И., Устойчивость и колебания упругих систем. Наука, М: 1979, 384с.