FORMULE UTILE REFERITOR LA MIŞCAREA PLAN PARALELĂ A RIGIDULUI

Autori: Mihai ȚOPA, Ion ȚERUŞ

Universitatea Tehnica a Moldovei

Abstract: *Se prezintă formule pentru determinarea vectorilor vitezei şi accelerației oricărui punct al ridigidului care efectuează mişcarea plan paralelă.*

Cuvinte cheie: *centrul instantaneu al vitezelor, centru instantaneu al accelerațiilor, viteza unghiulară, accelerația unghiulară.*

Mişcarea plan paralelă este frecvent întâlnită în tehnică. Majoritatea mecanismelor au elemente care efectuează mişcare plan paralelă. De aceea cercetării acestei mişcari i se acordă un interes deosebit. Cunoşterea vitezei centrului maselor permite calcularea energiei cinetice şi alcătuirea ecuațiilor mişcarii, de exemplu în forma ecuațiilor lui Lagrange de speța a doua. Soluția ecuațiilor permite determinarea reacțiunelor.

Viteza unui punct oarecare *B* al rigidului care are o mişcare plan paralelă se scrie:

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

Fie că există centrul instantaneu al vitezelor *P* , atunci

$$\vec{v_B} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PB}$$

Înmulțim vectorial această relație cu $\vec{\omega}$ şi obținem:

$$\vec{\omega} \times \vec{v_B} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \overrightarrow{PB} = -\omega^2 PB \quad \text{sau} \quad \overrightarrow{BP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v_B}}{\omega^2} \qquad (2)$$

Vectorul $\overrightarrow{BP}$ determină poziția centrului instantaneu al vitezelor în raport cu punctual *B* a cărui viteză este $\vec{v_B}$. Viteza punctului *C* poate fi calculată cu formula:

$$\vec{v_C} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PC} \qquad (3)$$

Dacă sunt cunoscute vitezele a două puncte *A* şi *B*, şi viteza unghiulară a rigidului aflat în milscare plană şi se cere vectorul $\overrightarrow{AB}$ ce determina poziția punctului *B* față de *A* atunci din (1) obținem:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{\omega} \times (\vec{v_A} - \vec{v_B})}{\omega^2} \qquad (4)$$

Din (1) avem: $\vec{v_A} - \vec{v_B} = \overrightarrow{AB} \times \vec{\omega}$

Înmulțim scalar cu $\overrightarrow{AB}$. Rezultă $(\vec{v_A} - \vec{v_B}) * \overrightarrow{AB} = 0$, iar dacă înmulțim vectorial cu $\overrightarrow{AB}$ avem:

$$(\vec{v_A} - \vec{v_B}) \times \overrightarrow{AB} = AB^2 * \vec{\omega}$$

Viteza ungiulara a rigidului se calculează cu formula: $\vec{\omega} = \frac{\vec{v_A} - \vec{v_B}}{AB^2} \times \overrightarrow{AB}$ (5)

Aplicație.

Ştiind viteza punctului *B* $\vec{v_B} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ şi viteza unghiulară a rigidului $\vec{\omega} = 2\vec{k}$, să se determină poziția centrului instantaneu al vitezelor. $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt versorii axelor de coordonare *x* şi *y* , respectiv.

Rezolvare. Conform formulei (2) rezultă $\overrightarrow{BP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v_B}}{\omega^2} = \frac{2\vec{k} \times (3\vec{i} + 4\vec{j})}{4} = -2\vec{i} + 1{,}5\vec{j}$.

1. Se ştie: $\overrightarrow{PC} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{\omega} = 2\vec{k}$. Să se determine $\vec{v_C}$.

Rezolvare. Conform formulei (3) rezultă $\vec{v_C} = 2\vec{k} \times (-4\vec{i} + 3\vec{j}) = -6\vec{i} - 8\vec{j}$, $v_C = 10$.

2. Să se determine vectorul $\overrightarrow{AB}$ dacă se ştie că $\vec{v_A} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v_B} = 4\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{\omega} = -2\vec{k}$

Rezolvare. Folosind formula (4), obținem $\overrightarrow{AB} = \frac{-2\vec{k} \times (8\vec{i} - 6\vec{j})}{4} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$.

3. Fie $\overrightarrow{v_A} = 4\vec{i}$, $\overrightarrow{v_B} = 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$. Să se afle $\vec{\omega}$. În primul rând verificăm satisfacerea condiției $(\overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B}) * \overrightarrow{AB} = 0$, atunci obținem: $(4\vec{i} - 3\vec{j})(6\vec{i} + 8\vec{j}) = 24 - 24 = 0$

Acum calculăm cu formula (5) viteza unghiulară $\vec{\omega} = \frac{(4\vec{i} - 3\vec{j}) \times (6\vec{i} + 8\vec{j})}{6^2 + 8^2} = 0{,}5\vec{k}$

Este cunoscută formula pentru accelerații: $\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} - \omega^2 * \overrightarrow{AB}$

Înmulțim scalar cu $\overrightarrow{AB}$ şi obținem: $(\overrightarrow{a_A} - \overrightarrow{a_B}) * \overrightarrow{AB} = \omega^2 AB^2$

Pătratul vitezei unghiulare: $\omega^2 = \frac{(\overrightarrow{a_A} - \overrightarrow{a_B})}{AB^2} * \overrightarrow{AB}$. (6)

Înmulțim vectorial cu $\overrightarrow{AB}$ şi avem pentru accelerația unghiulară: $\vec{\varepsilon} = \frac{(\overrightarrow{a_A} - \overrightarrow{a_B}) \times \overrightarrow{AB}}{AB^2}$ (7)

Înmulțind cunoscuta relație $\overrightarrow{a_A} = -\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AQ} + \omega^2 * \overrightarrow{AQ}$ vectorial cu $\vec{\varepsilon}$ şi avem:

$$\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{AQ}\varepsilon^2 + \vec{\varepsilon} \times \omega^2 * \overrightarrow{AQ}, \tag{8}$$

Iar înmulțind cu ω^2 obținem: $\omega^2 * \overrightarrow{a_A} = \omega^2 * \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AQ} + \omega^4 * \overrightarrow{AQ}$ (9)

Adunând membrii din (8) cu (9), obținem: $\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{a_A} + \omega^2 \overrightarrow{a_A} = (\varepsilon^2 + \omega^4) * \overrightarrow{AQ}$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{a_A} + \omega^2 \overrightarrow{a_A}}{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{10}$$

Aplicație. Se ştie accelerația $\overrightarrow{a_A}$, viteza ungiulară ω şi accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$ a unui rigid în mişcare plan paralelă. Să se determine poziția centrului instantaneu al accelerațiilor Q, dacă

$\overrightarrow{a_A} = 2\vec{i}$, $\vec{\omega} = 2\vec{k}$, $\vec{\varepsilon} = 4\vec{k}$.

Rezolvare. Conform formulei (10) obținem:

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{4\vec{k} \times (-2\vec{i}) + 4(-2\vec{i})}{16 + 16} = -\frac{1}{4}(\vec{i} + \vec{j}) \qquad AQ = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Concluzie.

Au fost reprezentate formule utile pentru determinarea vectorilor viteză şi accelerație ai oricărui punct al rigidului în mişcare plan paralelă. Aceste formule facilitează calculul.

Bibliografie

1. Caragangiu V., Colpagiu M., Topa M. Mecanica teoretică. Editura “Ştiința”, Chişinău, 1994, 471 p.
2. Eliferie Rogai, Mihai Rogai, Formule şi tabele matematice. Editura Tehnică, Bucureşti 1996, 263p.
3. Voinea R., Voiculescu D., Simion F., Introducere în mecanica solidului cu aplicații în ingenerie. Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti 1989, 1151 p.