ALGORITMIZAREA DISTRIBUIRII OPTIME A MANDATELOR ÎN SISTEME RP

Prof. univ. Ion BOLUN, ASEM

Sunt sistematizați indicii de apreciere a disproporționalității şi metodele de alocare a mandatelor în sisteme RP. Este demonstrat că minimizarea disproporționalității, în sensul fiecăruia din cei unsprezece indici cercetați aparte, se asigură, în funcție de caz, de una din trei metode: Hare, Sainte-Laguë şi d'Hondt. Este propusă dezvoltarea metodelor Sainte-Laguë şi d'Hondt, care permite reducerea numărului de paşi şi a volumului de calcule necesare pentru obținerea soluției optime. La soluția optimă, partidele în pierdere pierd mai puțin de un mandat, iar cele în câştig pot obține în exces: la metoda Hare – mai puțin de un mandat, iar la metodele Sainte-Laguë şi d'Hondt – mai mult de un mandat.

1. Introducere

La luarea de decizii colective prin votare cu ***reprezentare proporțională (RP)***, se cere minimizarea disproporției reprezentării voinței decidenților în opțiunea finală (decizie) – disproporție cauzată de caracterul atât al numărului de decidenți, cât şi al celui de opțiuni alternative. Estimarea acestei disproporții implică folosirea unor indici speciali, o parte din care sunt descrişi în [1-8]. Cele mai cunoscute practici privind folosirea sistemelor de votare sunt, probabil, cele ce țin de scrutinele electorale. De aceea, în continuare, aspectele de optimizare, abordate privind asemenea sisteme, se vor cerceta, fără a diminua din universalitate, prin prisma scrutinelor electorale cu ***reprezentare proporțională de liste*** de partid (coaliții, blocuri) – ***RPL***. Reprezentarea proporțională presupune distribuirea mandatelor proporțional numărului de voturi acumulate de către partide.

Totalizarea rezultatelor votării, în scopul obținerii deciziei colective (determinării numărului de mandate ce-i revin fiecărui partid în scrutin), presupune aplicarea anumitor reguli, denumite şi formule, metode sau algoritmi, o parte din care este descrisă în [1, 2, 8]; în continuare acestea se vor numi, de obicei, reguli „***voturi→mandate***" ***(VM)***. Diversitatea regulilor VM folosite este cauzată, în primul rând, de diversitatea scrutinelor. Totodată, distribuirea mandatelor într-un scrutin poate să difere în funcție de regula VM aplicată.

O formulare a problemei generale de minimizare a disproporționalității şi soluția pentru cazul folosirii în calitate de criteriu de optimizare a indicelui Abaterii relative medii sunt date în [8]. În lucrare se cercetează unele aspecte ce țin de minimizarea disproporționalității în sistemele RPL la aplicarea alternată, în acest scop, a 11 criterii de optimizare, inclusiv a celor Loosemore-

ALGORITHMIZATION OF OPTIMAL ALLOCATION OF SEATS IN PR SYSTEMS

Univ. Professor Ion BOLUN, AESM

Iindices of disproportionality and methods of allocation of seats in PR systems are systemized. It is proved that the minimization of disproportionality, in sense of each of the eleven analyzed indices, is assured, depending on case, by one of the methods: Hare, Sainte-Laguë and d'Hondt. Improving of Sainte-Laguë and d'Hondt methods, that reduce the number of steps and calculi needed to obtain the optimal solution, is proposed. At optimal solution, losing parties lose less than one seat, and gaining parties can gain in excess: by Hare method - less than one seat, and by Sainte-Laguë and d'Hondt methods – more than one seat, too.

1. Introduction

When taking collective decisions, using voting systems with ***proportional representation*** (PR), to minimize the disproportion of deciders' will representation in the final option (the decision) is required. To estimate this disproportion, caused by the character in integers of the number of deciders and the one of alternative options, the use of special indices is needed, some of which are described in [1-8]. The most known practices with referewe to the use of voting systems are, probably, the ones related to elections. Therefore, further, the addressed optimization aspects of such systems will be investigated (not harming the universality) through ***the party-lists PR elections – RPL.*** The proportional representation assumes the allocation of seats proportionally to the number of votes cast by parties.

Totalizing the voting, to obtain the collective decision (to determine the number of seats that incumbent each party), involves the application of certain rules, called also formulas, methods or algorithms, a part of which are described in [1, 2, 8]; further, they will o be called, usually, rules „***votes → seats***" ***(VS).*** The diversity of used voting rules is due, primarily, to the diversity of elections. At the same time, the distribution of seats in an election can differ, depending on the used VS rule.

A formulation of the general problem of minimizing the disproportionality and the solution, for the case of using as optimization criterion the Mean relative deviation, is done in [8]. In this paper some aspects related to the minimization of disproportionality in LPR systems, using in this aim, alternatively, 11 optimization criteria, including those of Loosemore-Handby [1], Sainte-Laguë [1], d'Hondt [1], Lijphart [4] Gallagher [1] and Mean relative

Handby [1], Sainte-Laguë [1], d'Hondt [1], Lijphart [4] Gallagher [1] şi Abaterii relative medii [8]. În cercetare se consideră: a) că toţi alegătorii sunt egali în drepturi, adică toate voturile au aceeaşi pondere; b) mandatele se distribuie doar în baza voturilor obţinute de către partidele care au trecut pragul electoral. Rezultatele obţinute la o asemenea supoziţii pot fi, de regulă, extinse relativ uşor şi fără acestea.

2. Reguli VM bine cunoscute pentru scrutine RPL

Pentru scrutinele RPL sunt definite aşa reguli VM ca [1, 2, 7]: metoda d'Hondt; metoda Sainte-Laguë; metoda Sainte-Laguë modificată; cota Hare; cota Droop, cota Hagenbach-Bischoff şi cota Imperiali. Primele trei reguli se bazează pe metoda „celei mai mare medii" (*highest average*), iar ultimele patru – pe metoda „celui mai mare rest" (*largest remainder*). Esenţa acestor metode constă în următoarele. Fie: M – numărul total de mandate în organul electiv; n – numărul de partide care a atins sau a depăşit pragul electoral; V – numărul total de voturi exprimate valabil pentru cele n partide; V_i – numărul de voturi exprimate în favoarea partidului i; x_i – numărul de mandate ce se alocă partidului i.

Metoda celui mai mare rest are la bază noţiunea de cotă de voturi, numită pur şi simplu cotă, cotă simplă sau **cotă Hare,** şi este propusă în 1792 de A.Hamilton [1]. *Cotă*, în scrutinele cu reprezentare proporţională, se numeşte numărul de voturi, fie şi fracţionar, ce revine în medie unui mandat. Această cotă, notată aici Q, se determină ca $Q = V/M$. Distribuirea mandatelor între partide conform metodei „Celui mai mare rest", la aplicarea cotei Hare (metoda Hare), se efectuează conform algoritmului A_1:

1) $a_i := \lceil V_i/Q \rceil$, $i = \overline{1,n}$, unde [z] semnifică partea întregilor numărului z. Se determină numărul mandatelor încă nedistribuite $\Delta M = M - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. Dacă $\Delta M = 0$, atunci distribuirea s-a încheiat şi este proporţională.

2) $\Delta V_i := V_i - a_i Q$, $i = \overline{1,n}$. Câte 1 mandat, din cele ΔM, se alocă suplimentar fiecăruia din primele ΔM partide cu valoarea mai mare a mărimii ΔV_i. Distribuirea s-a încheiat, dar nu este proporţională.

Distribuirea mandatelor între partide la aplicarea altei cote de voturi decât cea Hare se efectuează, de asemenea, conform algoritmului A_1, dar înlocuind Q cu cota respectivă.

Cota Droop [7], aici notată Q_D, este propusă în 1868 şi se determină ca $Q_D = \lfloor V/(M + 1) \rfloor + 1$, unde $\lfloor z \rfloor$ semnifică rotunjirea prin adaos până la întregi a numărului z.

Cota Hagenbach-Bischoff [2], aici notată $Q_{H\text{-}B}$, se determină ca $Q_{H\text{-}B} = V/(M + 1)$. Aceasta, este mai mică, de obicei, decât cele Hare şi Droop şi poate favoriza, în funcţie de caz, partidele cu mai multe voturi din contul celor cu mai puţine voturi.

Cota „Imperiali" [2], aici notată Q_I, se determină ca $Q_I = V/(M + 2)$. Aceasta este mai mică, de obicei, decât cele Hare şi Droop şi este mai mică decât cea Hagenbach-Bischoff şi poate favoriza mai puternic

deviation [8], are investigated. In researches is considered: a) that all electors are of equal rights, i.e. all votes have the same weight; b) seats are distributed only on the base of votes' cast by parties which passed the established threshold. Results, obtained in such assumptions, can be, as a rule, relatively easy extended for elections without them.

2. Well known VS rules for LPR elections

For LPR elections are defined such SV rules as [1, 2, 7]: d'Hondt method; Sainte-Laguë method; modified Sainte-Laguë method; Hare quota; Droop quota, Hagenbach-Bischoff quota and Imperiali quota. The first three rules are based on highest average method, and the last four – on largest remainder method. The essence of these methods is the following. Let: M – number of seats in the elective body; n – number of parties that have reached or exceeded the representation threshold; V – total valid votes cast for the n parties; V_i – total valid votes cast for party i; x_i – number of seats to be allocated to party i.

Largest remainder method, based on the notion of voting quota, called quota, ordinary quota or **Hare quota**, was proposed by A.Hamilton in 1792 [1]. Quota, in PR elections, is called the average number of votes, even a fractional one, per one seat. This quota, noted here Q, is determined as $Q = V/M$. The allocation of seats to parties according to the largest remainder method with the Hare quota (the Hare method), is done according to algorithm A_1:

1. $a_i := \lceil V_i/Q \rceil$, $i = \overline{1,n}$, where $\lceil z \rceil$ signifies the integer part of z, determining the number $\Delta M := M - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ of still undistributed seats. If $\Delta M = 0$, than the allocation of seats is finished and it is a proportional one.

2. $\Delta V_i := V_i - a_i Q$, $i = \overline{1,n}$. By one seat, from the ΔM ones, is additionally allocated to each of the first ΔM parties with the largest remainders ΔV_i. The allocation of seats is finished, but it is a non proportional one.

The distribution of seats among parties using another quota, than the Hare one, is done also according to algorithm A_1, but replacing Q with the respective quota.

Droop quota [7], noted here Q_D, is proposed in 1868 and is determined as $Q_D = \lfloor V/(M + 1) \rfloor + 1$, where $\lfloor z \rfloor$ signifies rounding up to integer of number z.

Hagenbach-Bischoff quota [2], noted here $Q_{H\text{-}B}$, is determined as $Q_{H\text{-}B} = V/(M + 1)$. This quota is smaller, usually, than the Hare and Droop ones and can favor, depending on case, parties with more votes at the expense of those with fewer votes.

„Imperiali" quota [2], noted here Q_I, is determined as $Q_I = V/(M + 2)$. This quota is smaller, usually, than the Hare and Droop ones and is smaller than the Hagenbach-Bischoff one and can stronger favor parties with more votes at the expense of those partidele cu mai multe voturi din contul celor cu mai puţine voturi. Dacă la distribuirea mandatelor între partide conform algoritmului A_1 are loc $\Delta M < 0$, atunci se aplică ajustări suplimentare, ceea ce a condus la folosirea rară a acestei cote în practică.

Metoda celei mai mari medii prevede calcularea, pentru fiecare partid i ($i = \overline{1,n}$), a raportului $V_i/(u_i + 1)$ consecutiv la u_i = 0, 1, 2, …, unde u_i este numărul de mandate deja alocate partidului i. Astfel, se formează n şiruri de numere descrescătoare, câte unul pentru fiecare din cele n partide. Din aceste n şiruri se selectează cele mai mari M numere, din care x_i numere ţin de şirul i, $i = \overline{1,n}$. Partidului i i se distribuie x_i mandate, $i = \overline{1,n}$. Metoda în versiunea descrisă este propusă de d'Hondt în 1878 şi se numeşte ***metoda d'Hondt*** [1], aceasta fiind similară ca esenţă cu ***metoda Jefferson*** propusă în 1792. Metoda poate favoriza [2], în funcţie de caz, partidele cu mai multe voturi din contul celor cu mai puţine voturi.

Metoda Sainte-Laguë [1] este propusă în 1910, fiind similară, după esenţă, cu ***metoda Webster*** [1], propusă în 1832, şi poate fi obţinută din cea d'Hondt prin înlocuirea u_i cu produsul $2u_i$.

Metoda Sainte-Laguë modificată [1] se deosebeşte de cea „Sainte-Laguë" prin înlocuirea primului divizor ($2u_i$ + 1, u_i = 0) cu 1,4. După cum s-a constatat, metoda poate favoriza [2], în funcţie de caz, partidele cu mai multe voturi din contul celor cu mai puţine voturi.

Bineînţeles, în funcţie de caracterul problemei de minimizare a disproporţionalităţii, poate fi oportună folosirea şi a altor algoritmi de optimizare.

3. Indici de disproporţionalitate a distribuirii mandatelor

În practica scrutinelor RPL, mai întâi au fost propuse diverse reguli VM şi doar apoi au fost propuşi indici de apreciere a disproporţionalităţii folosirii acestor reguli; desigur, regulile VM au fost propuse din anumite considerente de asigurare a reprezentării proporţionale. De preferat ar fi, totuşi, abordarea inversă – definirea explicită, mai întâi a criteriilor (indicilor) de distribuire a mandatelor în scrutine RPL şi doar ulterior determinarea soluţiei (elaborarea metodei, algoritmului etc.) care ar satisface aceste criterii.

Procesarea voturilor poate conduce, în funcţie de regula VM folosită, la rezultate diferite: procentul mandatelor ce-i revin unui partid nu este egal, de obicei, cu procentul voturilor acumulate de acesta. Într-adevăr, fie: $v_i = 100 \cdot V_i/V$, $m_i = 100 \cdot x_i/M$. Reprezentarea proporţională a celor n partide în organul electiv este atunci, când au loc relaţiile:

$$m_i = v_i,\ i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Dar, deoarece mărimile V, M, V_i, x_i ($i = \overline{1,n}$) sunt numere întregi, probabilitatea ca în scrutine concrete să se satisfacă egalităţile (1) este foarte mică. Astfel, în

with fewer votes.

If the distribution of seats among parties according to algorithm A_1 with Hagenbach-Bischoff or Imperiali quota occurs $\Delta M < 0$, then additional adjustments are applied.

Largest average method involves calculating, for each party i ($i = \overline{1,n}$), the ratio $V_i/(u_i + 1)$ consecutively at u_i = 0, 1, 2, …, where u_i is the number of seats already allocated to party i. So, n decreasing strings of numbers are formed, by one for each of the n parties. From these n strings, the M largest numbers are selected, from which x_i numbers are from string i, $i = \overline{1,n}$. To party i is allocated x_i seats, $i = \overline{1,n}$. The method in described version is proposed by d'Hondt in 1878 and is called ***d'Hondt method*** [1], this being similar, by essence, to ***Jefferson method*** proposed in 1792. The method can favor [2], depending on case, parties with more votes at the expense of those with fewer votes.

Sainte-Laguë method [1] was proposed in 1910, being similar, by essence, to ***Webster method*** [1] proposed in 1832, and can be obtained from the d'Hondt one by replacing u_i with the product $2u_i$.

Modified Sainte-Laguë method [1] differs from the Sainte-Laguë one by replacing the first divisor ($2u_i$ + 1, u_i = 0) with 1,4. As was found thal this method can favor [2], depending on case, parties with more votes at the expense of those with fewer votes.

Obviously depending on the character of the problem of disproportionality minimization, it can be also opportune the use of other optimization algorithms.

3. Indices of disproportionality of allocation of seats

In RPL elections practice, first where proposed diverse SV rules and only later where proposed indices for the estimation of disproportionality caused by the use of these rules; of course, SV rules where proposed of certain considerations to ensure the proportional representation. It will be better, however, the inverse approach – the explicit definition, first, of criteria (indices) of seats distribution in LPR elections and only after that to determine the solution which will satisfy this criteria.

Processing of votes can lead, depending of used SV rule, to different results: the percent of seats that incumbent to a party is not equal, as a rule, to the percent of votes cast by them. Really, let: $v_i = 100 \cdot V_i/V$, $m_i = 100 \cdot x_i/M$. The proportional representation of those n parties in the elective body is then, when occur the relations:

$$m_i = v_i,\ i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

But because values V, M, V_i, x_i ($i = \overline{1,n}$) are integers, the probability that in concrete elections equalities (1) will be satisfied is very small. So, in real scrutine RPL reale are loc o anumită disproporționalitate în distribuirea mandatelor între partide. În asemenea cazuri, este importantă aprecierea disproporționalității în cauză. În acest scop se folosesc diferite criterii, denumite şi indici de disproporționalitate. Esența a unsprezece din ei este următoarea:

Indicele Rae [3], aici notat I_{Rae}, este propus în 1967 şi se determină ca devierea absolută medie a procentajului voturilor de cel al mandatelor la un partid:

$$I_{Rae} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|v_i - m_i|. \quad (2)$$

Indicele Loosemore-Handby [1], aici notat I_{L-H}, este propus în 1971, poate fi interpretat ca devierea absolută sumară dintre m_i şi v_i pentru partidele cu deficit de mandate sau procentul mandatelor preluate de la unele partide (partide devenite, în baza acestei operări, cu deficit de mandate) şi distribuite altor partide (partide devenite, în baza acestei operări, cu exces de mandate) şi se determină ca:

$$I_{L-H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|v_i - m_i|. \quad (3)$$

Indicele Rose de proporționalitate [5], aici notat I_R, este propus în 1998, fiind o versiune normalizată a indicelui „Loosemore-Handby", astfel ca reprezentării proporționale să-i corespundă valoarea de 100%, iar în cel mai rău caz – 0%, şi se determină astfel:

$$I_R = 100 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|v_i - m_i|. \quad (4)$$

Indicele Grofman [6], aici notat I_{Gr}, este propus în 1985, se deosebeşte de cel Rae doar prin înlocuirea lui n cu „numărul efectiv" de partide $N = 10^4 \Big/ \sum_{i=1}^{n} v_i^2$

$$I_{Gr} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}|v_i - m_i|. \quad (5)$$

Indicele Lijphart [4], aici notat I_L, este propus în 1994 şi constituie devierea absolută maximă dintre m_i şi v_i:

$$I_L = \max_{i=\overline{1,n}} |v_i - m_i|. \quad (6)$$

Indicele Gallagher [1], aici notat I_{Ga}, este propus în 1991, se deosebeşte de cel Loosemore-Handby prin aceea că reprezintă devierea nu absolută, ci pătratică sumară dintre m_i şi v_i pentru partidele cu deficit de mandate, amplificând ponderea diferențelor $|v_i – m_i|$ mai mari din contul ponderilor diferențelor $|v_i – m_i|$ mai mici, şi se determină ca:

$$I_{Ga} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(v_i - m_i)^2}. \quad (7)$$

Se poate uşor observa că indicele „Gallagher" puțin se deosebeşte de indicele „Celor mai mici pătrate", larg folosit în practică în analiza regresională şi care

LPR elections there is a certain disproportionality of seats distribution among parties. In such cases, the estimation of such disproportionality is important. In this aim are used different criteria, also called indices of disproportionality. The essence of eleven of them is the following.

Rae index [3], noted here I_{Rae}, was proposed in 1967 and is determined as the mean absolute deviation of the percentage of votes from the percentage of seats by one party:

$$I_{Rae} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|v_i - m_i|. \quad (2)$$

Loosemore-Handby index [1], noted here I_{L-H}, was proposed in 1971, can be interpreted as the total absolute deviation between m_i and v_i for parties with deficit of seats or the percentage of seats taken from some parties (parties that have become, under this operation, with deficit of seats – losing parties) and distributed to other parties (parties that have become, under this operation, with excess of seats – gaining parties) and is determined as:

$$I_{L-H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|v_i - m_i|. \quad (3)$$

Rose index of proportionality [5], noted here I_R, was proposed in 1998, being a normalized version of Loosemore-Handby index, in such a way that to proportional representation corresponds a value of 100%, and to the worst case – 0%, and is determined as:

$$I_R = 100 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|v_i - m_i|. \quad (4)$$

Grofman index [6], noted here I_{Gr}, was proposed in 1985, differs from the Rae one only by the replacement of n by „effective number" of parties $N = 10^4 \Big/ \sum_{i=1}^{n} v_i^2$

$$I_{Gr} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}|v_i - m_i|. \quad (5)$$

Lijphart index [4], noted here I_L, was proposed in1994 and represents the maximal absolute deviation between m_i and v_i:

$$I_L = \max_{i=\overline{1,n}} |v_i - m_i|. \quad (6)$$

Gallagher index [1], noted here I_{Ga}, was proposed in 1991, differs from the Loosemore-Handby one by the representation of non absolute but of square total deviation between m_i and v_i for parties with deficit of seats, amplifying the weight of larger differences $|v_i - m_i|$ at the expense of weights of smaller differences $|v_i – m_i|$, and is determined as:

$$I_{Ga} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(v_i - m_i)^2}. \quad (7)$$

It is easily seen that Gallagher index little pentru mărimile v_i şi m_i se determină ca $\sum_{i=1}^{n}(v_i - m_i)^2$. Totuşi, pentru măsurarea acestuia în %, este oportună utilizarea rădăcinii pătrate de la expresia în cauză – abaterea pătratică. Astfel, notând indicele **Abaterii pătratice** prin I_{SD}, avem:

$$I_{SD} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(v_i - m_i)^2}. \qquad (8)$$

Indicele Sainte-Laguë [1], aici notat $I_{S\text{-}L}$, se determină ca:

$$I_{S-L} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i}(v_i - m_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i(1-\frac{m_i}{v_i})^2. \qquad (9)$$

Indicele d'Hondt invers, în [1] denumit indice „d'Hondt", aici notat I_{IH}, reprezintă raportul maxim dintre m_i şi v_i:

$$I_{IH} = \max_{i=1,n}\frac{m_i}{v_i}. \qquad (10)$$

Indicele Abaterii relative medii [8], aici notat I_d, reprezintă abaterea relativă medie a

reprezentării în organul electiv a drepturilor $d_i = V_i/V$, $i=\overline{1,n}$ ale alegătorilor de la valoarea medie $d = M/V$ şi se determină astfel:

$$\mathrm{I_d} = \frac{\Delta \mathrm{d}}{\mathrm{d}}100 = \sum_{i=1}^{n}|\mathrm{v_i} - \mathrm{m_i}|, \qquad \textbf{\textit{unde}}\ \Delta\mathrm{d} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V_i}|\mathrm{d_i} - \mathrm{d}|. \qquad (11)$$

Aici $\Delta d_i = |d_i - d|$ reprezintă abaterea (eroarea) absolută a reprezentării în cele x_i mandate a valorii d a drepturilor fiecărui alegător, ce a votat pentru partidul i. Abaterea relativă medie $100{\cdot}\Delta d/d$, măsurată în procente a Δd faţă de d, este echivalentă, după cum se poate observa din (11), cu procentul mandatelor prin care distribuirea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ diferă de cea care ar asigura reprezentarea egală în organul electiv a drepturilor (de valoare d) alegătorilor.

Indicele Abaterii standard relative [8], aici notat I_σ, reprezintă abaterea standard relativă a reprezentării în organul electiv a drepturilor $d_i = x_i/V_i$, $i=\overline{1,n}$ ale alegătorilor de la valoarea medie $d = M/V$ şi se determină ca:

$$\mathrm{I_\sigma} = \frac{\sigma}{\mathrm{d}}100 = 10\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{v_i}}(\mathrm{v_i} - \mathrm{m_i})^2},$$

$$\text{unde } \sigma = \sqrt{\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}V_i(d_i - d)^2}. \qquad (12)$$

Aici σ este abaterea standard a reprezentării în organul electiv a drepturilor d_i, $i=\overline{1,n}$ ale alegătorilor de la valoarea medie d, aplicând, pentru simplitate,

differs from the Least square one, widely used in practice in regression analyses and which for parameters v_i and m_i is determined as $\sum_{i=1}^{n}(v_i - m_i)^2$. However, to measure it in %, it is opportune to use the square root of this expression – square deviation. Thus, noting the **Square deviation index** by I_{SD}, we have:

$$\mathrm{I_{SD}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{v_i} - \mathrm{m_i})^2}. \qquad (8)$$

Sainte-Laguë index [1], noted here $I_{S\text{-}L}$, is determined as

$$I_{S-L} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i}(v_i - m_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i(1-\frac{m_i}{v_i})^2. \qquad (9)$$

Inverse d'Hondt index, in [1] called d'Hondt index, noted here I_{IH}, represents the maximal ratio between m_i and v_i:

$$I_{IH} = \max_{i=1,n}\frac{m_i}{v_i}. \qquad (10)$$

Mean relative deviation index [8], noted here I_d, represents the mean relative deviation of the representation in the elective body of electors' rights $d_i = V_i/V$, $i=\overline{1,n}$ from the mean value $d = M/V$ and is determined as:

$$\mathrm{I_d} = \frac{\Delta \mathrm{d}}{\mathrm{d}}100 = \sum_{i=1}^{n}|\mathrm{v_i} - \mathrm{m_i}|, \qquad \textbf{\textit{where}}\ \Delta\mathrm{d} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V_i}|\mathrm{d_i} - \mathrm{d}|. \qquad (11)$$

Here $\Delta d_i = |d_i - d|$ represents the absolute deviation (error) of the representation in the x_i seats of the value d of rights of each elector that votes for party i. The mean relative deviation $100{\cdot}\Delta d/d$, measured in percents of Δd by d, is equivalent, as it can be seen from (11), to the percent of seats by which the distribution $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ differs from the distribution which assure the equal representation in the elective body of electors' rights (of value d).

Relative standard deviation index [8], noted here I_σ, represents the relative standard deviation of the representation in the elective body of electors' rights $d_i = x_i/V_i$ from the mean value $d = M/V$ and is determined as:

$$I_\sigma = \frac{\sigma}{d}100 = 10\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{v_i}(v_i - m_i)^2},$$

$$\text{where } \sigma = \sqrt{\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n}V_i(d_i - d)^2}. \qquad (12)$$

Here σ is the standard deviation of the representation in the elective body of electors' rights d_i, $i=\overline{1,n}$ from the mean value d, by applying, for simplicity, the dividing to V and not to $V-1$, the value of V being relatively large. In (12) I_σ is measured in împărţirea la V şi nu la $V-1$, valoarea lui V fiind relativ mare. În (12) I_σ se măsoară în procente a σ faţă de d.

După cum se poate observa, primii şase din indicii enumeraţi – Rae (2), Loosemore-Handby (3), Rose (4), Grofman (5), Lijphart (6) şi cel al Abaterii relative medii (11) – au la bază abaterea absolută a m_i de la v_i, următorii patru – Gallagher (7), Abaterii pătratice (8), Sainte-Laguë (9) şi cel al Abaterii standard relative (12) – au la bază abaterea pătratică a m_i de la v_i, iar cel d'Hondt invers (10) – raportul dintre m_i şi v_i. De asemenea, între indicii (2)-(5) şi (11) au loc relaţiile:

$$I_{L-H} = I_{Rae} \cdot n/2 = I_{Gr} \cdot N/2 = 100 - I_R = I_d/2, \quad (13)$$

între cei (7) şi (8) – relaţia:

$$I_{Ga} = I_{SD} / \sqrt{2}, \quad (14)$$

iar între cei (9) şi (12) – relaţia:

$$I_\sigma = 10\sqrt{I_{S-L}} \quad (15)$$

şi $I_d \le I_\sigma$, egalitate având loc doar în cazurile în care $|v_i - m_i| = \text{const}$, $i = \overline{1,n}$.

4. Problemă generală de minimizare a disproporţionalităţii în scrutine RPL

Conform abordării din [8], problema minimizării disproporţionalităţii în scrutine RPL poate fi formulată în modul următor: fie sunt cunoscute mărimile: M; n; V; V_i, x_i, $i = \overline{1,n}$; I – indicele de disproporţionalitate. Se cere determinarea mărimilor x_i ($i = \overline{1,n}$) – numere întregi nenegative, care ar asigura valoarea extremală a indicelui I:

$$I = f(M; n; V_i, x_i, i = \overline{1,n}) \to \text{extremum} \quad (16)$$

la respectarea restricţiilor:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = M, \quad (17)$$

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V. \quad (18)$$

În (16) prin „extremum" se subînţelege valoarea minimală sau maximală a indicelui I, în funcţie de esenţa acestuia. Dacă I semnifică disproporţionalitatea distribuirii celor M mandate între n partide, atunci se are în vedere minimizarea valorii lui I, iar dacă I caracterizează proporţionalitatea distribuirii mandatelor între partide, atunci se indică maximizarea valorii acestuia. Totodată, deoarece încă nu s-a convenit asupra unui indice de disproporţionalitate universal, în cele ce urmează se va cerceta folosirea în calitate de criteriu de optimizare (16) a fiecăruia din cei unsprezece indici (2)-(12) descrişi în p. 3.

5. Algoritmi de minimizare a disproporţionalităţii

Relaţiile (13)-(15) facilitează considerabil cercetarea particularităţilor utilizării celor unsprezece indici cercetaţi în calitate de criteriu de optimizare în problema (16)-(18). În ce priveşte indicii (2)-(5) şi (11), cunoscând numărul n de partide, numărul V_i, $i = \overline{1,n}$ de voturi şi unul din aceşti cinci indici, se pot calcula, conform relaţiilor (13), ceilalţi patru indici. Chiar dacă aceşti indici şi diferă ca valoare absolută, atunci din punctul de vedere al minimizării disproporţionalităţii ei

percent of σ by d.

As can be seen from the first six the enumerated indices – Rae (2), Loosemore-Handby (3), Rose (4), Grofman (5), Lijphart (6) and the Mean relative deviation (11) – are based on absolute deviation of m_i from v_i, the following four – Gallagher (7), Square deviation (8), Sainte-Laguë (9) and the Relative standard deviation (12) – are based on square deviation of m_i from v_i, and the inverse d'Hondt one (10) – the ratio between m_i and v_i. Also, among indices (2)-(5) and (11) occur the relations:

$$I_{L-H} = I_{Rae} \cdot n/2 = I_{Gr} \cdot N/2 = 100 - I_R = I_d/2, \quad (13)$$

between the (7) and (8) ones – the relation

$$I_{Ga} = I_{SD} / \sqrt{2}, \quad (14)$$

and between the (9) and (12) ones – the relation

$$I_\sigma = 10\sqrt{I_{S-L}} \quad (15)$$

and $I_d \le I_\sigma$, the equality holds only in cases when $|v_i - m_i| = \text{const}$, $i = \overline{1,n}$.

4. General problem of minimization of disproportionality in LPR elections

According to the approach from [8], the problem of minimization of disproportionality in LPR elections can be formulated as follows: let be known the parameters: M; n; V; V_i, $i = \overline{1,n}$; I – index of disproportionality. It is required to determine unknowns x_i ($\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}$) – non-negative integers, which will assure the I extreme value:

$$I = f(M; n; V_i, x_i, i = \overline{1,n}) \to \text{extremum} \quad (16)$$

in compliance with restrictions:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = M, \quad (17)$$

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = V. \quad (18)$$

In (16) by „extremum" is understood the minimum or maximum value of index I, depending of its essence. If I signifies the disproportionality of distribution of the M seats among n parties, then it is envisaged to minimize the value of I, and if I characterizes the proportionality of seats distribution among parties, then it means the maximization of its value. However, because there is not yet agreed on a universally index of disproportionality, below it will be investigated the use as optimization criterion (16) of each one from the eleven indices (2)-(12) described in p. 3.

5. Algorithms for the minimization of disproportionality

Relations (13)-(15) considerably facilitate the investigation of particularities of using the eleven investigated indices as optimization criterion in problem (16)-(18). With reference to indices (2)-(5) and (11), knowing the number n of parties, the number V_i, $\mathrm{i} = \overline{1,\mathrm{n}}$ of votes and any of these five indices, can be calculated, according to relations (13), the other four indices. Even if these indices differ as absolute values, by the point of view of the minimization of conduc la aceeaşi soluţie: asigurarea disproporţionalităţii minime pentru un scrutin conform unuia din ei asigură disproporţionalitatea minimă şi pentru fiecare din ceilalţi indici. Deci, din punctul de vedere al minimizării disproporţionalităţii, poate fi folosit în calitate de criteriu de optimizare doar unul din aceştia (oricare din cei (2)-(5) şi (11)). În mod similar, în calitate de criteriu de optimizare poate fi utilizat doar unul din indicii (7) şi (8), precum şi unul din indicii (9) şi (12). Astfel, din cei unsprezece indici (2)-(12) este suficient de cercetat în calitate de criteriu (16) în problema (16)-(18) doar cinci; se vor cerceta indicii: (6), (7), (9), (10) şi (11).

Pentru cazul folosirii în calitate de criteriu de optimizare a **indicelui Abaterii relative medii (11)**, în [8] este demonstrat că soluţia optimă se obţine conform metodei celui mai mare rest cu cota Hare. Valoarea optimă I_d^* a indicelui I_d se determină ca [8]:

disproportionality, they lead to the same solution: assuring the minimum of disproportionality for an election according to one of them assures the minimum of disproportionality for the other indices, too. Therefore, from the point of view of the minimization of disproportionality, can be used as optimization criterion only one of them (anyone from the (2)-(5) and (11)). In a similar mode, as optimization criterion can be used only one of indices (7) and (8) and one of indices (9) and (12) as well. Thus, from the eleven indices (2)-(12) it is sufficient to investigate as criterion (16) in problem (16)-(18) only five; it will be investigated indices: (6), (7), (9), (10) and (11).

For the case of using as optimization criterion of **Mean relative deviation index (11)**, in [8] is proved that the optimal solution is obtaining, according to Largest, remainder method with the Hare quota. Optimal value I_d^* of index I_d is determined as [8]:

$$I_d^* = \frac{200}{V}\sum_{j=1}^{\Delta M}(Q - R_j) = 200\left(\frac{\Delta M}{M} - \frac{1}{V}\sum_{j=1}^{\Delta M} R_j\right), \tag{19}$$

unde R_j, $j = \overline{1,\Delta M}$ sunt cele mai mari ΔM resturi din cele ΔV_i, $i = \overline{1,n}$. Din (19) se poate observa că I_d^* depinde de $\Delta M/M$ şi raportul $(R_1 + R_2 + \ldots + R_{\Delta M})/V$. Totodată, deoarece $1 \le \Delta M \le n - 1$, valoarea ΔM depinde şi de numărul de partide. În baza relaţiilor (19) şi (13) pot fi uşor obţinute expresiile pentru valorile optime I_{L-H}^*, I_{Rae}^*, I_{Gr}^* şi I_R^* ale indicilor I_{L-H}, I_{Rae}, I_{Gr} şi I_R.

De menţionat că metoda celui mai mare rest cu cota Hare asigură soluţia optimă şi în sensul **minimizării indicelui Gallagher (8)**. Într-adevăr, fie $a_i = \lceil dV_i \rceil$ mandate, unde $\lceil z \rceil$ semnifică partea întregilor numărului z. Atunci $x_i = a_i + \Delta x_i$, unde Δx_i este numărul de mandate ce trebuie să-i revină partidului i, suplimentar la cele a_i. De asemenea, avem $Q = 1/d$. Atunci are loc $V_i = a_i/d + \Delta V_i = a_i Q + \Delta V_i$, unde ΔV_i este restul de la împărţirea lui V_i la Q. Folosind modalitatea aplicată în [8] pentru indicele (11), expresia (8) poate fi prezentată în forma:

where R_j, $j = \overline{1,\Delta M}$ are the largest ΔM remainders from the ΔV_i, $i = \overline{1,n}$ ones. From (19) it can be seen that I_d^* depends on $\Delta M/M$ and on ratio $(R_1 + R_2 + \ldots + R_{\Delta M})/V$. Also, because $1 \le \Delta M \le n - 1$, the value ΔM depends on the number of parties, too. Basing on relations (19) and (13) can be easily obtained expressions for optimal values I_{L-H}^*, I_{Rae}^*, I_{Gr}^* and I_R^* of indices I_{L-H}, I_{Rae}, I_{Gr} and I_R.

To note that the Largest remainder method with the Hare quota assures the optimal solution, in sense of the minimization of the **Gallagher index (8)**, too. Really, let $a_i = \lceil dV_i \rceil$ seats, where $\lceil z \rceil$ signifies the integer part of z. Then $x_i = a_i + \Delta x_i$, where Δx_i is the number of seats that must incumbent to party i, additionally to the a_i ones. Also, we have $Q = 1/d$. Then taker place relations $V_i = a_i/d + \Delta V_i = a_i Q + \Delta V_i$, where ΔV_i is the remainder from dividing of V_i to Q. Using the modality applied in [8] for index (11), expression (8) can be presented in the form:

$$\begin{aligned} \min\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(v_i - m_i)^2} &= 100\cdot\min\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{V_i}{V} - \frac{x_i}{M}\right)^2} = \frac{100}{V}\cdot\min\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(V_i - Qx_i)^2} = \\ &= \frac{100}{V}\cdot\min\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(Qa_i + \Delta V_i - Qa_i - \Delta x_i Q)^2} = \frac{100}{V}\cdot\min\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta V_i - \Delta x_i Q)^2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Astfel, fiecărui partid i ($i = \overline{1,n}$) i s-au distribuit deja proporţional (contribuirea la valoarea I_{Ga} fiind 0) câte a_i mandate, folosind în acest scop a_iQ voturi şi rămânând încă nedistribuite

Thus, to each party i ($i = \overline{1,n}$) it was already distributed proportionally (the contribution to the value of I_{Ga} being 0) by a_i seats, using in this aim a_iQ votes and remaining undistributed yet

$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = M - \sum_{i-1}^{n} a_i = \Delta M$ mandate la ΔMQ voturi nefolosite, iar problema de minimizare a disproporţionalităţii s-a redus la determinarea $\Delta x_i, i=\overline{1,n}$, care ar asigura:

$$I_{Ga} = \frac{100}{V}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta V_i - \Delta x_i Q)^2} \rightarrow \min \quad (21)$$

la respectarea restricţiei

$$\Delta M = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = d\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i. \quad (22)$$

Evident, nu poate fi $\Delta x_i > 1$ şi nici $\Delta x_i < 1$, deoarece în asemenea cazuri ar creşte valoarea I_{Ga} în (21) faţă de cazurile $\Delta x_i = 0$ sau $\Delta x_i = 1$. Expresia $Q - \Delta V_i = Q - R_j = \Delta R_j \geq 0$ reprezintă complementul restului $R_j = \Delta V_i$ până la cota Hare Q. Fiecare astfel complement contribuie la valoarea I_{Ga} doar dacă $\Delta x_i = 1$, partidului i revenindu-i un surplus de ΔR_j voturi, şi nu contribuie, dacă $\Delta x_i = 0$, în acest caz contribuind la valoarea I_{Ga} restul $\Delta V_i = R_j$ însuşi, egal cu numărul de voturi pe care le pierde partidul i. În total sunt n mărimi Δx_i, din care doar ΔM diferite de 0. Ţinând cont că numărul total ΔR de voturi suplimentare, distribuite partidelor pentru care $\Delta x_i = 1$, este egal cu numărul total ΔV de voturi pierdute de către partidele pentru care $\Delta x_i = 0$, avem:

$$\Delta R = \sum_{j=1}^{\Delta M}\Delta R_j = \Delta MQ - \sum_{j=1}^{\Delta M} R_j = \sum_{j=\Delta M+1}^{n} R_j = \Delta V. \quad (23)$$

Înlocuind (23) în (21), obţinem:

$$I_{Ga} = \frac{100}{V}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{\Delta M}\Delta R_j^2 + \sum_{j=\Delta M+1}^{n} R_j^2\right)} \rightarrow \text{mir.} \quad (24)$$

Să determinăm condiţiile de minimizare a expresiei din paranteze a formulei (24). Din (24) rezultă că mărimea $(Q - \Delta V_i)^2$ este preferabil, faţă de cea $(Q - \Delta V_k)^2$, pentru a fi unul din cei ΔM factori ai primei sume, dacă are loc relaţia $(Q - \Delta V_i)^2 + \Delta V_k^2 < (Q - \Delta V_k)^2 + \Delta V_i^2$, de unde obţinem condiţia scontată: $\Delta V_i < \Delta V_k$. Deci pentru a minimiza valoarea I_{Ga}, este necesar şi suficient ca din cele n de ales ΔM, cele mai mari valori ale resturilor $R_j = \Delta V_i$ şi fiecăruia din partidele respective de alocat încă câte un mandat la cele a_i deja alocate. Distribuirea optimă este încheiată anume folosind metoda celui mai mare rest cu cota Hare, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Prezintă interes aprecierea cantitativă analitică a disproporţionalităţii I_{Ga}^* a soluţiei optime. Această valoare este dată de expresia (24) la $I_{Ga} = I_{Ga}^*$, adică

$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = M - \sum_{i-1}^{n} a_i = \Delta M$ seats at ΔMQ unused votes, and the problem of minimization of disproportionality is reducing to determining $\Delta x_i, i=\overline{1,n}$ which will assure:

$$I_{Ga} = \frac{100}{V}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta V_i - \Delta x_i Q)^2} \rightarrow \min \quad (21)$$

in compliance with the restriction

$$\Delta M = \sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = d\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i. \quad (22)$$

Evidently, it can't be neither $\Delta x_i > 1$ nor $\Delta x_i < 1$, because in such cases the value of I_{Ga} in (21) will increase relative to cases of $\Delta x_i = 0$ or $\Delta x_i = 1$ ones. Expression $Q - \Delta V_i = Q - R_j = \Delta R_j \geq 0$ represents the complement of remainder $R_j = \Delta V_i$ to the Hare quota Q. Each such complement contributes to the value of I_{Ga} only if $\Delta x_i = 1$, party i assuming in excess ΔR_j votes, and not contributes, if $\Delta x_i = 0$, in this case contributing to the value of I_{Ga} the remainder $\Delta V_i = R_j$ itself, which is equal to the number of votes loosed by party i. Totally, there are n values Δx_i, from which only ΔM differ from 0. Taking into account that the total number ΔR of supplementary votes, distributed to parties for which $\Delta x_i = 1$, is equal to the total number ΔV of votes loosed by parties for which $\Delta x_i = 0$, we have:

Replacing (23) in (21), onwe can obtain:

Let us determine the conditions to minimize the expression in brackets of the formula (24). From (24) results that the value $(Q - \Delta V_i)^2$ is preferable, to the $(Q - \Delta V_k)^2$ one, to be one of the ΔM factors of the first sum, if the relation $(Q - \Delta V_i)^2 + \Delta V_k^2 < (Q - \Delta V_k)^2 + \Delta V_i^2$ occurs, from where we can easily obtain the expected condition: $\Delta V_i < \Delta V_k$. Hence, to minimize the value of I_{Ga} it is necessary and sufficient that from the n ones to select ΔM largest values of remainders $R_j = \Delta V_i$ and to each of the respective parties to allocate by one additional seat to the a_i already allocated ones. The optimal distribution is finished and, namely, using the Largest remainder method with the Hare quota, just what was required to prove.

It is of interest the quantitative analytical estimation of disproportionality I_{Ga}^* of the optimal solution. This value is done by expression (24) at $I_{Ga} = I_{Ga}^*$, i.e.

$$\min I_{Ga} = I_{Ga}^{*} = \frac{100}{V}\sqrt{\frac{1}{2}(\sum_{j=1}^{\Delta M}(Q-R_j)^2 + \sum_{j=\Delta M+1}^{n}R_j^2)} = 100\sqrt{\frac{1}{2}[\sum_{j=1}^{\Delta M}(\frac{1}{M}-\frac{R_j}{V})^2 + \sum_{j=\Delta M+1}^{n}(\frac{R_j}{V})^2]}, \quad (25)$$

unde R_j, $j=\overline{1,\Delta M}$ sunt cele mai mari ΔM resturi din cele ΔV_i, $i=\overline{1,n}$. Astfel, I_{Ga}^{*} depinde de M, ΔM şi raporturile R_j/V, $j=\overline{1,n}$. Totodată, deoarece $1 \le \Delta M \le n - 1$, valoarea ΔM depinde de numărul de partide. În baza (25) şi (14), poate fi uşor determinată şi expresia pentru valoarea optimă I_{SD}^{*} a indicelui I_{SD}.

Să folosim abordarea, aplicată la minimizarea indicelui „Gallagher”, pentru minimizarea **indicelui Sainte-Laguë (9)**. În baza relației (20), indicele (9) poate fi prezentat în forma:

where R_j, $j=\overline{1,\Delta M}$ are the largest ΔM remainders from the ΔV_i, $i=\overline{1,n}$ ones. Thus, I_{Ga}^{*} depends on M, ΔM and ratios R_j/V, $j=\overline{1,n}$. Therewith, because of $1 \le \Delta M \le n - 1$, the value ΔM depends on the number of parties. Basing on (25) and (14), it can be easily determined the expression for the optimal value I_{SD}^{*} of index I_{SD}, too.

Let’s use the approach, applied to minimizing the Gallagher index, for the minimization of the **Sainte-Laguë index (9)**. Basing on relation (20), index (9) can be presented in the form

$$\min I_{S-L} = I_{S-L}^{*} = \frac{100}{V}\min\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V_i}(\Delta V_i - \Delta x_i Q)^2, \quad (26)$$

fiecărui partid i ($i=\overline{1,n}$), ca şi la obținerea relației (20), fiindu-i deja distribuite proporțional (contribuirea la valoarea I_{S-L} fiind 0) câte a_i mandate, folosind în acest scop a_iQ voturi şi rămânând încă nedistribuite $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = M - \sum_{i-1}^{n} a_i = \Delta M$ mandate la ΔMQ voturi nefolosite, iar problema de minimizare a disproporționalității I_{S-L} s-a redus la determinarea $\Delta x_i, i=\overline{1,n}$.

Să demonstrăm că $\Delta x_i \ge 0, i=\overline{1,n}$. Fie Δs_i – numărul de mandate alocate suplimentar partidului i la cele a_i, $i=\overline{1,n}$ şi $\Delta s_k = 0$. Atunci este preferabilă, în sensul (26), redistribuirea unui mandat de la partidul k la cel i, dacă are loc inegalitatea

to each party i ($i=\overline{1,n}$), as when obtaining relation (20), being already allocated proportionally (the contribution to the value of I_{S-L} being 0) by a_i seats, using in this aim a_iQ votes and still remaining undistributed $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = M - \sum_{i-1}^{n} a_i = \Delta M$ seats at ΔMQ unused votes, and the problem of minimization of disproportionality I_{S-L} is reducing to determining $\Delta x_i, i=\overline{1,n}$.

To proof that $\Delta x_i \ge 0, i=\overline{1,n}$, let Δs_i – number of seats allocated to party i additionally to the a_i, $i=\overline{1,n}$ ones and $\Delta s_k = 0$. Then it is preferable, in sense of (26), to reallocate one seat from party k to the i one, if holds the inequality

$$\frac{[(\Delta s_i + 1)Q - \Delta V_i)]^2}{V_i} + \frac{(Q+\Delta V_k)^2}{V_k} < \frac{(\Delta s_i Q - \Delta V_i)^2}{V_i} + \frac{\Delta V_k^2}{V_k}$$

sau, în urma unor transformări simple, dacă $(Q + 2\Delta s_i)/V_i + Q/V_k < 0$, ceea ce nu poate fi, deoarece $\Delta s_i \ge 0, i=\overline{1,n}$. Astfel, $\Delta x_i \ge 0, i=\overline{1,n}$, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Fie E – numărul de partide cu exces de mandate ($m_i > v_i$), adică pentru care $\Delta x_i > 0$. Atunci, considerând $\Delta x_l > 0$, $l=\overline{1,E}$ şi $\Delta x_l = 0$, $l=\overline{E+1,n}$, expresia (26) ia forma

or, after some ordinary transformations, if $(Q + 2\Delta s_i)/V_i + Q/V_k < 0$, that can’t be, because of $\Delta s_i \ge 0, i=\overline{1,n}$. So, $\Delta x_i \ge 0, i=\overline{1,n}$, just what it was needed to proof.

Let E – number of parties with seats in excess ($m_i > v_i$), i.e. for which $\Delta x_i > 0$. Then, considering $\Delta x_l > 0$, $l=\overline{1,E}$ and $\Delta x_l = 0$, $l=\overline{E+1,n}$, expression (26) takes the form

$$I_{S-L}^{*} = \frac{100}{V}\min\left(\sum_{l=1}^{E}\frac{(\Delta x_l Q - R_l)^2}{U_l} + \sum_{l=E+1}^{n}\frac{R_l^2}{U_l}\right), \qquad (27)$$

unde: $U_l = V_i$, $R_l = \Delta V_i$; $(\Delta x_l Q - R_l)^2 / U_l, l = \overline{1,E}$ sunt acele $E \leq \Delta M$ raporturi $(\Delta x_i Q - \Delta V_i)^2/V_i$ pentru care $\Delta x_i > 0$, iar $R_l^2 / U_l, l = \overline{\Delta M + 1, n}$ sunt celelalte $n - E$ raporturi $(\Delta x_i Q - \Delta V_i)^2/V_i$ – raporturi pentru care $\Delta x_i = 0$. Să determinăm condițiile de minimizare a expresiei din paranteze a formulei (27). Din (27) rezultă că raportul $(\Delta x_i Q - \Delta V_i)^2/V_i$ este preferabil față de cel $(\Delta x_k Q - \Delta V_k)^2/V_k$, unde $\Delta x_k = 1$, pentru a fi inclus în cele $l = \overline{1,E}$ raporturi ale primei sume, dacă are loc relația:

where: $U_l = V_i$, $R_l = \Delta V_i$; $(\Delta x_l Q - R_l)^2 / U_l, l = \overline{1,E}$ are the $E \leq \Delta M$ ratios $(\Delta x_i Q - \Delta V_i)^2/V_i$ for which $\Delta x_i > 0$, and $R_l^2 / U_l, l = \overline{\Delta M + 1, n}$ are the other $n - E$ ratios $(\Delta x_i Q - \Delta V_i)^2/V_i$ – ratios for which $\Delta x_i = 0$. Let determine the conditions for the minimization of the expression in brackets of formula (27). From (27) results that the ratio $(\Delta x_i Q - \Delta V_i)^2/V_i$ is preferable, to the $(\Delta x_k Q - \Delta V_k)^2/V_k$ one, where $\Delta x_k = 1$, to be included in the $l = \overline{1,E}$ ratios of the first sum, if holds the relation:

$$\frac{(\Delta x_i Q - \Delta V_i)^2}{V_i} + \frac{\Delta V_k^2}{V_k} < \frac{(Q - \Delta V_k)^2}{V_k} + \frac{[(\Delta x_i - 1)Q - \Delta V_i]^2}{V_i},$$

de unde obținem condiția scontată:

from where we can easily obtain the expected condition:

$$\frac{Q(2\Delta x_i - 1) - 2\Delta V_i}{V_i} < \frac{Q - 2\Delta V_k}{V_k}. \qquad (28)$$

Ținând cont că $V_i = a_i Q + \Delta V_i$ şi $V_k = a_k Q + \Delta V_k$, relația (28) poate fi transformată în

$$\frac{Q(2\Delta x_i - 1) - 2V_i + a_i Q}{V_i} < \frac{Q - 2V_k + a_k Q}{V_k},$$

de unde $\frac{2(a_i + \Delta x_i) - 1}{V_i} < \frac{2a_k + 1}{V_k}$

sau

Taking into account that $V_i = a_i Q + \Delta V_i$ and $V_k = a_k Q + \Delta V_k$, the relation (28) can be transformed into

$$\frac{Q(2\Delta x_i - 1) - 2V_i + a_i Q}{V_i} < \frac{Q - 2V_k + a_k Q}{V_k},$$

from where $\frac{2(a_i + \Delta x_i) - 1}{V_i} < \frac{2a_k + 1}{V_k}$

or

$$\frac{V_i}{2(a_i + \Delta x_i) - 1} > \frac{V_k}{2a_k + 1}. \qquad (29)$$

Dacă are loc condiția (29), atunci este preferabilă, în sensul (27), adăugarea, la cele a_i, a încă Δx_i mandate partidului i față de adăugarea, la cele a_k, încă a unui mandat partidului k. Deci expresia (27) poate fi prezentată în forma:

Dacă are loc condiția (29), atunci este preferabilă, în sensul (27), adăugarea, la cele a_i, a încă Δx_i mandate partidului i față de adăugarea, la cele a_k, încă a unui mandat partidului k. Deci expresia (27) poate fi prezentată în forma:

$$I_{S-L}^{*} = \frac{100}{V}\left(\sum_{l=1}^{E}\frac{(\Delta x_l Q - R_l)^2}{U_l} + \sum_{l=E+1}^{n}\frac{R_l^2}{U_l}\right), \qquad (30)$$

unde mărimile $(\Delta x_l Q - R_l)^2 / U_l, l = \overline{1,E}$ corespund celor mai mari ΔM raporturi $V_i/[2(a_i + \Delta x_i) - 1]$ la $\Delta x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. În baza relațiilor (30) şi (15) poate fi uşor obținută

where values of $(\Delta x_l Q - R_l)^2 / U_l, l = \overline{1,E}$ correspond to the largest ΔM ratios $V_i/[2(a_i + \Delta x_i) - 1]$ at $\Delta x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Basing on relations (30) and (15), it is easy to expresia pentru valoarea optimă I_σ^* a indicelui I_σ. Din (29) poate fi obţinut plafonul pentru valoarea Δx_i:

$$\Delta x_i < \frac{V_i(2a_k+1)}{2V_k} - a_i + \frac{1}{2}. \qquad (31)$$

Dacă considerăm $V_i \approx a_i(Q+1)$, $V_k \approx a_k Q$ şi $Q >> 2a_i+1$, atunci $\Delta x_i < (1 + a_i/a_k)/2$. De exemplu, la $a_i/a_k = 3$ plafonul pentru valoarea Δx_i este egal, aproximativ, cu 2.

Condiţia (29), la $\Delta x_i = 1$, este similară celei folosite la metoda „Sainte-Laguë”, cu deosebirea că aici $a_i(a_k)$ nu ia consecutiv valorile 1, 2, 3, …, ci $a_i = \lceil V_i/Q \rceil$ (de asemenea, $a_k = \lceil V_k/Q \rceil$), iar condiţia (31) poate fi utilizată pentru reducerea volumului calculelor. Algoritmul A_2 de determinare a soluţiei optime, în sensul minimizării indicelui „Sainte-Laguë” (9), folosind rezultatele obţinute, constă în următoarele:

1. $x_i := a_i = \lceil dV_i \rceil = \lceil V_i/Q \rceil$, $i = \overline{1,n}$. Se determină $\Delta M := M - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. Dacă $\Delta M = 0$, atunci distribuirea mandatelor s-a încheiat şi este proporţională.

2. Câte $\Delta x_i > 0$ mandate, din cele ΔM încă nedistribuite, se alocă suplimentar primelor $E \le \Delta M$ partide cu valoarea mai mare a raportului $V_i/[2(a_i + \Delta x_i) - 1]$. În acest scop, poate fi folosită metoda Sainte-Laguë, dar începând cu $u_i = a_i$ (nu cu $u_i = 0$), $i = \overline{1,n}$. Mai puţine calcule la acest pas asigură următoarea procedură:

2.1. Partidele se ordonează în ordinea descreşterii raportului $V_i/(2a_i + 1)$.

2.2. $E := \Delta M$; $\Delta x_i := 1$, $i = \overline{1,E}$; $\Delta x_i = 0$, $i = \overline{E+1,n}$.

2.3. Dacă $E = 1$, atunci trecem la p. 2.8.

2.4. $\Delta x_i := \lceil V_i(2a_E+1)/(2V_E) - a_i + 1/2 \rceil, i = \overline{1,E-1}$. Aici $\lceil z \rceil$ semnifică partea întregilor de la z.

2.5. $S := \sum_{i=1}^{E} \Delta x_i$. Dacă $S = \Delta M$, atunci se trece la p. 2.8.

2.6. $\Delta x_E := 0$; $S := S - 1$; $E := E - 1$. Dacă $S = \Delta M$, atunci trecere la p. 2.8.

2.7. Din cele E şiruri de rapoarte $V_i/[2(a_i + j_i) - 1]$, $j_i = \overline{1,\Delta x_i}$, se elimină cele mai mici $E - \Delta M$ rapoarte şi, respectiv, se actualizează valorile mărimilor Δx_i, $i = \overline{1,E}$.

2.8. $x_i := a_i + \Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$. Stop. Distribuirea s-a încheiat, fiind, totuşi, neproporţională. Totodată, partidele în pierdere pierd, conform pasului 1, mai puţin de un mandat, iar partidelor cu mandate în exces le pot reveni suplimentar mai mult decât 1 mandat (vezi, bunăoară, exemplul 1).

obtain the expression for the optimal value I_σ^* of index I_σ. From (29) can be obtained the upper limit for Δx_i:

If considering $V_i \approx a_i(Q+1)$, $V_k \approx a_k Q$ and $Q >> 2a_i+1$, then $\Delta x_i < (1 + a_i/a_k)/2$. For example, at $a_i/a_k = 3$ the upper limit for Δx_i is equal, approximately, to 2.

Condition (29), at $\Delta x_i = 1$, is similar to the one used with Sainte-Laguë method, with the only difference that here $a_i(a_k)$ doesn't take consecutively the values 1, 2, 3, …, but $a_i = \lceil V_i/Q \rceil$ (also, $a_k = \lceil V_k/Q \rceil$), and condition (31) can be used to reduce the volume of calculi. Algorithm A_2 of determining the optimal solution, in sense of Sainte-Laguë index (9) minimization, using the obtained results, consists of the following:

1. $x_i := a_i = \lceil dV_i \rceil = \lceil V_i/Q \rceil$, $i = \overline{1,n}$. Determining $\Delta M := M - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. If $\Delta M = 0$, than the allocation of seats is finished and it is a proportional one.

2. By $\Delta x_i > 0$ seats, from the ΔM still undistributed ones, are additionally allocated to the first $E \le \Delta M$ parties with the largest ratio $V_i/[2(a_i + \Delta x_i) - 1]$. In this aim can be used the Sainte-Laguë method, but beginning with $u_i = a_i$ (not with $u_i = 0$), $i = \overline{1,n}$. Fewer calculations at this step assures the following procedure:

2.1. Parties are ordered in the decreasing order of the ratio $V_i/(2a_i + 1)$.

2.2. $E := \Delta M$; $\Delta x_i := 1$, $i = \overline{1,E}$; $\Delta x_i = 0$, $i = \overline{E+1,n}$.

2.3. If $E = 1$, then go to p. 2.8.

2.4. $\Delta x_i := \lceil V_i(2a_E+1)/(2V_E) - a_i + 1/2 \rceil, i = \overline{1,E-1}$. Here $\lceil z \rceil$ signifies the integer part of z.

2.5. $S := \sum_{i=1}^{E} \Delta x_i$. If $S = \Delta M$, then go to p. 2.8.

2.6. $\Delta x_E := 0$; $S := S - 1$; $E := E - 1$. If $S = \Delta M$, then go to p. 2.8.

2.7. From the E strings of ratios $V_i/[2(a_i + j_i) - 1]$, $j_i = \overline{1,\Delta x_i}$, to remove the smallest $E - \Delta M$ ratios and, respectively, to actualize the values of Δx_i, $i = \overline{1,E}$.

2.8. $x_i := a_i + \Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$. Stop. Distribution is finished, being, however, non proportional. Therewith, losing parties lose, according to step 1, fewer than one seat, and parties with seats in excess can incumbent additionally more than 1 seat (as in example 1).

Exemplul 1. Fie: $M = 101$ mandate; $n = 20$ partide; $V = 11157$ voturi; $V_1 = 8300$ voturi; $V_i = 151$ voturi, $i = \overline{2,8}$; $V_i = 150$ voturi, $i = \overline{9,20}$. Rezultatele calculelor sunt prezentate în tabelul 1. În cazul dat, pentru primul partid, soluția conformă indicelui „Sainte-Laguë" este mai mare decât cea conformă indicelui „Abaterii relative medii" cu 7 mandate, din care mai mult de 6 (6,86) mandate în exces, defavorizând astfel considerabil celelalte partide.

Example 1. Let: $M = 101$ seats; $n = 20$ parties; $V = 11157$ votes; $V_1 = 8300$ votes; $V_i = 151$ votes, $i = \overline{2,8}$; $V_i = 150$ votes, $i = \overline{9,20}$. Results of done calculations are presented in table 1. In this case, for the first party, the solution according to Sainte-Laguë index is larger than the one obtained to mean relative deviation index by 7 seats, from which more than six (6,86) seats in excess, at a considerably expense of the other parties.

Tabelul 1/ Table 1

Compararea metodelor Sainte-Laguë şi Hare/
Comparison of Sainte-Laguë and Hare methods

	x_1	x_i, $i = \overline{2,8}$	x_i, $i = \overline{9,20}$	$I_{S\text{-}L}$, %	I_d, %
Metoda Sainte-Laguë (A_2)/ Sainte-Laguë method (A_2)	82	1	1	2,42	13,59
Metoda Hare (A_1)/ Hare method (A_1)	75	2	1	3,15	8,78

De menționat că relația (29) poate fi obținută şi direct, fără a folosi egalitatea $\Delta V_i = a_i Q + \Delta V_i$, doar că atunci nu devine explicită aplicarea primului pas al algoritmului A_2. Într-adevăr, în baza relației (20), indicele (9) poate fi prezentat în forma:

Note that the relation (29) can be also obtained directly, without the use of the equality $\Delta V_i = a_i Q + \Delta V_i$, but in this case it doesn't become explicit the application of the first step of algorithm A_2. Really, basing on relation (20), the index (9) can be presented in the form:

$$\min I_{S-L} = I^*_{S-L} = \frac{100}{V} \min \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{V_i}(V_i - x_i Q)^2 . \qquad (32)$$

Fie că s_i este numărul de mandate deja alocate partidului i şi $s_i < x_i$, $i = \overline{1,n}$. Atunci este preferabil, în sensul (32), de alocat încă Δs_i mandate partidului i, decât de alocat încă un mandat partidului k, dacă are loc condiția:

Noting s_i the number of seats already allocated to party i, $s_i < x_i$, $i = \overline{1,n}$. Then it is preferable, in sense of (32), to allocate Δs_i more seats to party i, than to allocate one more seat to party k, if holds the condition:

$$\frac{1}{V_i}[(V_i - (s_i + \Delta s_i)Q]^2 + \frac{1}{V_k}(V_k - s_k Q)^2 < \frac{1}{V_k}[(V_k - (s_k + 1)Q]^2 + \frac{1}{V_i}[V_i - (s_i + \Delta s_i - 1)Q]^2 ,$$

de unde, ca rezultat al unor transformări simple, obținem $2(s_i + \Delta s_i)/V_i < (2s_k + 1)/V_k$ sau

from where, after some ordinary transformation, we obtain $2(s_i + \Delta s_i)/V_i < (2s_k + 1)/V_k$ or

$$\frac{V_i}{2(s_i + \Delta s_i) - 1} > \frac{V_k}{2s_k + 1} , \qquad (33)$$

care, la $\Delta s_i = 1$, se reduce la regula „Sainte-Laguë" de distribuire a mandatelor.

În baza unor sugestii similare cu cele privind aplicarea indicilor (7) şi (11), se poate uşor constata că **minimizarea indicelui Lijphart** (6) se asigură de metoda celui mai mare rest cu cota Hare. Valoarea I^*_L a indicelui I_L pentru soluția optimă, în sensul minimizării indicelui „Lijphart", într-un scrutin concret se obține conform expresiei:

which, at $\Delta s_i = 1$, is reducing to the Sainte-Laguë rule of seats distribution.

Basing on suggestions similar to the ones with reference to the application of indices (7) and (11), it can be easily find that the **minimization of the Lijphart index** (6) is assured by the largest remainder method with the Hare quota. The value I^*_L of index I_L for the optimal solution, in sense of the minimization of the Lijphart index, for a concrete election is obtained conform to expression:

$$I_L^* = \min \max_{i=\overline{1,n}} |v_i - m_i| = \frac{100}{V} \min \max_{i=\overline{1,n}} |\Delta V_i - \Delta x_i Q| = \frac{100}{V} \min \Delta R_k, \tag{34}$$

unde ΔR_k este cel mai mare dintre ΔM cele mai mici complemente ΔR_j din cele n în total.

Optimizarea distribuirii mandatelor în sensul **indicelui d'Hondt invers (10)** presupune [1] ca cel mai mare dintre rapoartele m_i/v_i, $i = \overline{1,n}$, la respectarea restricţiilor (17)-(18), să fie pe cât posibil mai mic, adică

where ΔR_k is the largest from the ΔM smallest complements ΔR_j from the n ones in the total.

The optimization of seats distribution, in sense of **inverse d'Hondt index (10),** assumes [1] that the largest of ratios m_i/v_i, $i = \overline{1,n}$, in compliance with restrictions (17)-(18), be as small as possible, i.e.

$$I_{IH}^* = \min \max_{i=\overline{1,n}} \frac{m_i}{v_i} = \min \max_{i=\overline{1,n}} \frac{Qx_i}{V_i} = \min \max_{i=\overline{1,n}} \frac{Q(a_i + \Delta x_i)}{V_i}. \tag{35}$$

Evident, $Q(a_i + 1)/V_i > 1$, $Qa_i/V_i \le 1$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le M < n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Egalitate în ultima relaţie are loc doar la distribuirea proporţională a mandatelor între toate cele n partide, $I_{IH}^* = 1$. Dacă $I_{IH}^* > 1$, atunci se poate demonstra că pentru soluţia optimă au loc relaţiile $\Delta x_i \ge 0, i = \overline{1,n}$. Într-adevăr, fie Δs_i numărul de mandate alocate suplimentar partidului i la cele a_i, $i = \overline{1,n}$ şi $\Delta s_j > 0$, $\Delta s_k = 0$. În asemenea condiţii, $Q(a_j + \Delta s_j)/V_j > Qa_k/V_k$ şi este preferabilă, în sensul (35), redistribuirea unui mandat de la partidul k la cel j, dacă are loc inegalitatea:

Evidently, $Q(a_i + 1)/V_i > 1$, $Qa_i/V_i \le 1$ and $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \le M < n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Equality in the last relation occurs only at proportional distribution among all the n parties, $I_{IH}^* = 1$. If $I_{IH}^* > 1$, then it can be proved that for the optimal solution relations $\Delta x_i \ge 0, i = \overline{1,n}$ occur. Really, let Δs_i – number of seats allocated to party i additionally to the a_i, $i = \overline{1,n}$ ones and $\Delta s_j > 0$, $\Delta s_k = 0$. In such conditions, $Q(a_j + \Delta s_j)/V_j > Qa_k/V_k$ and is preferable, in sense of (35), to reallocate one seat from party k to the j one, if holds the inequality:

$$\max\left\{\frac{Q(a_j + \Delta s_j + 1)}{V_j}; \frac{Q(a_k - 1)}{V_k}\right\} < \max\left\{\frac{Q(a_j + \Delta s_j)}{V_j}; \frac{Qa_k}{V_k}\right\},$$

adică dacă $Q(a_j + \Delta s_j + 1)/V_j < Q(a_j + \Delta s_j)/V_j$, ceea ce nu poate fi, deoarece $\Delta s_j > 0$. Astfel, $\Delta x_i \ge 0, i = \overline{1,n}$, ceea ce şi se cerea de demonstrat.

Aşadar, pentru $E \le \Delta M$ partide are loc $\Delta x_i \ge 1$, iar pentru celelalte $n - E$ are loc $\Delta x_i = 0$. De aceea şi ţinând cont că $Qa_i/V_i \le 1$ şi $Q(a_i + 1)/V_i > 1$, la determinarea $I_{IH}^* > 1$ pot fi luate în considerare doar acele raporturi $Q(a_i + \Delta x_i)/V_i$, în care $\Delta x_i \ge 1$. Există E asemenea raporturi; mai mult ca atât, valoarea $I_{IH}^* > 1$ este egală cu valoarea celui mai mare dintre aceste E raporturi. Notând prin U_h numărul de voturi acumulate de partidul cu un astfel de raport, iar prin R_h – restul de la împărţirea U_h la Q, expresia (35) poate fi prezentată în forma:

i.e. if $Q(a_j + \Delta s_j + 1)/V_j < Q(a_j + \Delta s_j)/V_j$, which can't be, because of $\Delta s_j > 0$. Thus, $\Delta x_i \ge 0, i = \overline{1,n}$, just what was required to prove.

So, for $E \le \Delta M$ parties occur $\Delta x_i \ge 1$, and for the other $n - E$ ones hold $\Delta x_i = 0$. Therefore and taking into account that $Qa_i/V_i \le 1$ and $Q(a_i + 1)/V_i > 1$, when determining $I_{IH}^* > 1$ can be taken into account only those ratios $Q(a_i + \Delta x_i)/V_i$, in which $\Delta x_i \ge 1$. There exists such ratios as E; moreover, the value $I_{IH}^* > 1$ is equal to the value of the largest from these E ratios. Noting by U_h the number of votes cast by the party with such a ratio, and by R_h – the remainder from dividing of U_h to Q, expression (35) can be presented in the form:

$$I_{IH}^* = \begin{cases} 1, \text{ dacr } a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M \\ Q(a_h + \Delta x_h)/U_h, \text{ oncaz contrar} \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ dacr } a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M \\ (a_h + \Delta x_h)/(a_h + dR_h), \text{ oncaz contrar,} \end{cases} \tag{36}$$

Se poate observa că raportul $(a_i + \Delta x_i)/V_i$ este, la $\Delta x_i = 1$, invers celui folosit în metoda d'Hondt. De aceea ar fi oportun de numit **indice d'Hondt I_H** indicele invers celui (10) şi anume

It can be seen that ratio $(a_i + \Delta x_i)/V_i$ is, at $\Delta x_i = 1$, inverse to the one used by d'Hondt method. Therefore it is opportune to call **d'Hondt index I_H** the index inverse to the (10) one, namely

$$I_H = \min_{i=\overline{1,n}} \frac{v_i}{m_i}. \tag{37}$$

Optimizarea distribuirii mandatelor în sensul indicelui d'Hondt presupune ca cel mai mic din rapoartele v_i/m_i, $i = \overline{1,n}$, la respectarea cerinţelor (17)-(18), să fie pe cât posibil mai mare, adică

The optimization of seats distribution in sense of the d'Hondt index assumes that the smallest of ratios v_i/m_i, $i = \overline{1,n}$, in compliance with requirements (17)-(18), be as large as possible, i.e.

$$I^*_{Hd} = \max \min_{i=\overline{1,n}} \frac{v_i}{m_i} = \max \min_{i=\overline{1,n}} \frac{V_i}{Qx_i} = \max \min_{i=\overline{1,n}} \frac{dV_i}{a_i + \Delta x_i}. \tag{38}$$

Urmând raţionamente similare cu cele aplicate la determinarea I^*_{IH}, expresia (38) poate fi prezentată în forma

Following similar reasoning as the applied when determining I^*_{IH}, expression (38) can be presented in the form

$$I^*_H = \begin{cases} 1, \text{ dacr } a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M \\ dU_h/(a_h + \Delta x_h), \text{ oncaz contrar} \end{cases} = \begin{cases} 1, \text{ dacr } a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M \\ (a_h + dR_h)/(a_h + \Delta x_h), \text{ oncaz contrar,} \end{cases} \tag{39}$$

unde U_h este numărul de voturi acumulate de partidul cu cel mai mic dintre cele $E \le \Delta M \le n - 1$ cele mai mici raporturi $V_i/(a_i + \Delta x_i)$, în care $\Delta x_i \ge 1$, iar R_h – restul de la împărţirea U_h la Q. Din (38) rezultă că este preferabilă adăugarea, la cele a_i, a încă Δx_i mandate partidului i faţă de adăugarea, la cele a_k, încă a unui mandat partidului k, dacă are loc condiţia $dV_i/(a_i + \Delta x_i) > dV_k/(a_k + 1)$ sau, ceea ce este acelaşi lucru,

where U_h is the number of votes cast by party with the smallest from the $E \le \Delta M \le n - 1$ smallest ratios $V_i/(a_i + \Delta x_i)$ in which $\Delta x_i \ge 1$, and R_h – the remainder from the dividing of U_h to Q. From (38) results that is preferable to add, to the a_i ones, Δx_i more seats to party i comparatively to adding, to the a_k ones, one more seat to party k, if the condition $dV_i/(a_i + \Delta x_i) > dV_k/(a_k + 1)$ occurs or, what is the same,

$$\frac{V_i}{a_i + \Delta x_i} > \frac{V_k}{a_k + 1}. \tag{40}$$

Din (40) poate fi obţinut plafonul pentru valoarea Δx_i

From (40) can be obtained the upper limit for Δx_i

$$\Delta x_i < \frac{V_i}{V_k}(a_k + 1) - a_i \tag{41}$$

De exemplu, dacă de considerat $V_i \approx a_i(Q + 1)$, $V_k \approx a_k Q$ şi $Q >> a_k > 0$, atunci, aproximativ, $\Delta x_i < a_i/a_k$. Deoarece pot fi cazuri în care a_i este de multe ori mai mare decât a_k, poate fi şi $\Delta x_i > 2$; adică partidele cu mai multe voturi acumulate pot obţine în exces, conform metodei d'Hondt, mai mult de un mandat. Bunăoară, pentru exemplul 1, soluţia conformă metodei „d'Hondt" coincide cu cea conformă metodei „Sainte-Laguë", în care primului partid îi sunt alocate în exces mai mult de şase mandate.

În baza relaţiilor (40) şi (41), obţinerea soluţiei optime conform indicelui „d'Hondt" (10) poate fi realizată conform algoritmului A_3:

For example, if considering $V_i \approx a_i(Q + 1)$, $V_k \approx a_k Q$ şi $Q >> a_k > 0$, then, approximately, $\Delta x_i < a_i/a_k$. Because there may be cases when a_i is more times larger than a_k, it can be $\Delta x_i > 2$, too; i.e. parties with more votes cast can obtain in excess, according d'Hondt method, more than one seat. In example 1, the solution according to d'Hondt method coincide with the one conform to Sainte-Laguë method, in which to the first party were allocated in excess more than six seats.

Basing on relations (40) and (41), obtaining the optimal solution according to d'Hondt index (10) can be realized conform to algorithm A_3:

1. $x_i := a_i = \lceil dV_i \rceil = \lceil V_i/Q \rceil$, $i = \overline{1,n}$. Se determină numărul mandatelor încă nedistribuite $\Delta M := M - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. Dacă $\Delta M = 0$, atunci distribuirea s-a încheiat şi este proporţională.

2. Câte $\Delta x_i > 0$ mandate, din cele ΔM, se alocă suplimentar primelor $E \leq \Delta M$ partide cu valoarea mai mare a raportului $V_i/(a_i + \Delta x_i)$. În acest scop poate fi aplicată metoda d'Hondt, dar începând cu $u_i = a_i$ (nu cu $u_i = 0$), $i = \overline{1,n}$. Mai puţine calcule necesită procedură folosită la paşii 2.1-2.8 ai algoritmului A_2 cu următoarele deosebiri: a) la pasul 2.1, partidele se ordonează în ordinea descreşterii raportului $V_i/(a_i + 1)$; b) la pasul 2.4, se aplică $\Delta x_i := \lceil V_i(a_E + 1)/V_E - a_i \rceil$, $i = \overline{1, E-1}$; c) la pasul 2.7 se consideră cele E şiruri de rapoarte $V_i/(a_i + j_i)$, $j_i = \overline{1, \Delta x_i}$. Distribuirea s-a încheiat, fiind, totuşi, neproporţională. Totodată, partidele în pierdere ($m_i < v_i$) pierd, conform pasului 1 al algoritmului A_3, mai puţin de un mandat, iar partidelor cu exces de mandate ($m_i > v_i$) le pot reveni suplimentar mai mult decât 1 mandat (vezi, bunăoară, exemplul 1).

6. Concluzii

Soluţionarea problemei (16)-(18), la folosirea în calitate de criteriu de optimizare (16), alternat, a celor 11 indici descrişi în p. 3, se realizează conform a trei algoritmi: a) A_1 – pentru indicii Rae (2), Loosemore-Handby (3), Rose (4), Grofman (5), Lijphart (6), Gallagher (7), Abaterii pătratice (8) şi Abaterii relative medii (11); b) A_2 – pentru indicii Sainte-Laguë (9) şi Abaterii standard relative (12); c) A_3 – pentru indicele d'Hondt invers (10) sau, ceea ce este acelaşi lucru, cel d'Hondt (38). Algoritmul A_1 reprezintă metoda „Celui mai mare rest cu cota Hare", iar cei A_2 şi A_3 – modificări ale metodelor „Sainte-Laguë" şi „d'Hondt", respectiv. Deosebirea algoritmilor A_2 şi A_3 de cei folosiţi în metodele „Sainte-Laguë" şi „d'Hondt" constă în aceea că primii nu necesită împărţirea consecutivă a V_i la divizorii $2u_i + 1$ ($u_i = 0, 1, 2, \ldots$), ca în cazul metodei „Sainte-Laguë", sau la divizorii $2u_i + 1$ ($u_i = 0, 1, 2, \ldots$), ca în cazul metodei „d'Hondt", iar soluţia se obţine într-un număr de paşi mult mai mic.

De menţionat că, la primul pas, algoritmii A_1, A_2 şi A_3 coincid, reprezentarea obţinută fiind, în cazul că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M$, proporţională. Deosebirea între aceşti trei algoritmi, la cel de al doilea pas, constă în aceea că cele ΔM mandate, rămase nedistribuite după primul pas, se alocă suplimentar: câte un mandat fiecăruia din primele $\Delta M < n - 1$ partide cu valoarea mai mare a resturilor ΔV_i – la algoritmul A_1; câte $\Delta x_i > 0$ mandate primelor $E \leq \Delta M < n - 1$ partide cu valoarea mai mare a raportului $V_i/[2(a_i + \Delta x_i) -1]$ – la algoritmul A_2 şi – a raportului $V_i/(a_i + \Delta x_i)$ – la algoritmul A_3, reprezentarea obţinută fiind, totuşi, neproporţională. Totodată, pentru toţi

1. $x_i := a_i = \lceil dV_i \rceil = \lceil V_i/Q \rceil$, $i = \overline{1,n}$. Determining the number $\Delta M := M - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ of still undistributed seats. If $\Delta M = 0$, than the allocation of seats is finished and it is a proportional one.

2. By $\Delta x_i > 0$ seats, from the ΔM ones, are additionally allocated to each of the first $E \leq \Delta M$ parties with the largest ratio $V_i/(a_i + \Delta x_i)$. In this aim can be used the d'Hondt method, but beginning with $u_i = a_i$ (not with $u_i = 0$), $i = \overline{1,n}$. Fewer calculations needs the procedure used at steps 2.1-2.8 of algorithm A_2 with the following differences: a) at step 2.1, parties are ordered in the decreasing order of ratio $V_i/(a_i + 1)$; b) at step 2.4, is applied $\Delta x_i := \lceil V_i(a_E + 1)/V_E - a_i \rceil$, $i = \overline{1, E-1}$; c) at step 2.7 are considered the E strings of ratios $V_i/(a_i + j_i)$, $j_i = \overline{1, \Delta x_i}$. Distribution is finished, being, however, non proportional. At the same time, the losing parties ($m_i < v_i$) loses, conform to step 1 of algorithm A_3, fewer than one seat, and parties with seats in excess ($m_i > v_i$) can additionally incumbent more than one seat (see, example 1).

6. Conclusions

Solving the problem (16)-(18), using as optimization criterion (16), alternatively, those 11 indices described in p. 3, is done according to three algorithms: a) A_1 – for indices Rae (2), Loosemore-Handby (3), Rose (4), Grofman (5), Lijphart (6), Gallagher (7), Square deviation (8) and Mean relative deviation (11); b) A_2 – for indices Sainte-Laguë (9) and Relative standard deviation (12); c) A_3 – for inverse d'Hondt (10) or, what is the same, the d'Hondt one (38). Algorithm A_1 represents the largest remainder method with the Hare quota, and A_2 and A_3 – modifications of Sainte-Laguë and d'Hondt methods, respectively. The difference of algorithms A_2 and A_3 from the ones used in Sainte-Laguë and d'Hondt methods consists in fact that the first doesn't need the consecutive dividing of V_i to divisors $2u_i + 1$ ($u_i = 0, 1, 2, \ldots$), as in case of Sainte-Laguë method, or to divisors $2u_i + 1$ ($u_i = 0, 1, 2, \ldots$), as in case of d'Hondt method, and the solution is obtained after a considerably less number of steps.

To note that, at first step, algorithms A_1, A_2 and A_3 coincide, the obtained representation being, in case of $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = M$, proportional. The difference among these three algorithms, at the second step, consists in the fact that the ΔM seat, remained undistributed after the first step, are allocated supplementary: by one seat to each of the first $\Delta M < n - 1$ parties with the largest value of remainders ΔV_i - at algorithm A_1; by $\Delta x_i > 0$ seats to the first $E \leq \Delta M < n - 1$ parties with the largest value of the ratio $V_i/[2(a_i + \Delta x_i) -1]$ – at algorithm A_2 and – of the ratio $V_i/(a_i + \Delta x_i)$ – at algorithm A_3, the obtained representation being, aceşti trei algoritmi, partidele în pierdere ($m_i < v_i$) pierd mai puțin de un mandat, iar cele în câştig ($m_i > v_i$) pot obține în exces: la algoritmul A_1 - mai puțin de un mandat, iar la algoritmii A_2 şi A_3 – şi mai mult de un mandat.

however, non proportional. At the same time, for all these three algorithms, losing parties ($m_i < v_i$) lose less than one seat, and gaining parties ($m_i > v_i$) can obtain in excess: at algorithm A_1 – les than one seat, and at algorithms A_2 and A_3 – more than one seat, too.

Referințe / References

1. Gallagher M. Proportionality, *Disproportionality and Electoral Systems*// Electoral Studies (1991), 10:1, pp. 33-51.
2. Sorescu A., Pârvulescu C. şi col. *Sisteme electorale*. – Bucureşti: ProDemocrația, 2006. - 54 p.
3. Rae D.W. *The Political Consequences of Electoral Lows*. New Heaven, Yale University Press, 1967.
4. Lijphart A. *Electoral Systems and Party Systems. Oxford*, Oxford University Press, 1994.
5. Rose R., Munro N., Mackie T. *Elections in Central and Eastern Europe Since 1990*. Strathclyde: Center for the Study of Public Policy, 1998.
6. Grofman, B. and Lijphart, A. (1986). *Electoral Lows and their Political Consequences*. Agathon Press, New York.
7. Henry R. Droop, *On Methods of Electing Representatives*, Journal of the Statistical Society of London, Vol. 44, No. 2. (Jun., 1881), pp. 141-202 (Reprinted in Voting matters, No. 24 (Oct., 2007), pp. 7-46).
8. Bolun I. *Seats allocation in party-list election*// Economica, nr.2(76)/2011. - Chişinău: Editura ASEM.