

CALCULAREA REGIMULUI TRANZITORIU ÎN CIRCUITUL CU SARCINI DISTRIBUITE DE TIP *RL* ȘI *RC*

POSTORONCA S., VIERU D.

Institutul de Energetică al AȘM

Summary. Article is devoted to methodology of analytical calculations of transition processes in electric chains like *rL* and *rC* with the distributed parameters

Key words: Transition processes, electric chains like *rL* and *rC* with the distributed parameters

INTRODUCERE

Pentru orice circuit electric apare problema determinării curenților, căderii tensiunii, pierderilor de energie indiferent de caracterul proceselor care derulează în acest circuit. Această problemă se soluționează prin examinarea unui circuit echivalent, care include trei componente de bază: rezistențe active, care determină procesul de disipare a energiei electrice la scurgerea curentului (transformarea în căldură), inductivitatea și capacitatea în care se acumulează energie electrică în câmpul magnetic și în câmpul electric. Ultimele componente dacă sunt ideale nu consumă energie, dar numai asigură un proces de schimb de energie dintre ele [1].

La frecvențe joase circuitele electrice se pot prezenta prin scheme echivalente formate din combinații de componente RLC. În cazul alimentării de la surse de energie cu semnale periodice sinusoidale calcularea regimurilor permanente se execută cu metoda simbolică de calcul cu utilizarea metodelor descrise în bazele teoretice ale electrotehnicii [2].

Mai multe dificultăți se întâlnesc la calcularea regimurilor tranzitorii, deoarece curenții și tensiunile nu mai sunt semnale periodice și este necesar de ținut cont și de condițiile inițiale, care pot fi nenule. Calcularea regimului tranzitoriu necesită obținerea soluției unor ecuații diferențiale, care descriu în timp procesele din circuit [2].

Distribuția energiei electrice se face prin circuite electrice care au sarcinile distribuite, iar tensiunile în punctele de racord depind de toate sarcinile conectate la rețea. Ca urmare este necesar de rezolvat sisteme de ecuații cu multe necunoscute, utilizând instrumente de calcul destul de complexe, ceea ce poate crea dificultăți la obținerea soluției căutate.

În prezenta lucrare se examinează o abordare de utilizare a metodei curenților de contur la calcularea regimului în rețeaua cu sarcini distribuite de tipul *RLC*.

FORMULAREA PROBLEMEI

Vom considera că sursa de alimentare, sarcinile conectate la rețea, precum și porțiunile de rețea între punctele de racord ale sarcinilor se pot prezenta prin componente cu parametri concentrați de tipul *RLC* în diferite combinații. Sarcinile sunt de tipul *RL* și *RC*, iar impedanța internă a sursei de alimentare și porțiunile rețelei dintre punctele de racord prezintă elemente de tipul *RL*. Obiectivul investigației constă în obținerea valorilor curenților în sarcini și a valorilor tensiunilor în nodurile de racord a sarcinilor la rețea în regim tranzitoriu la alimentarea de la o sursă de curent sinusoidal.

METODA DE CALCUL.

Pentru determinarea valorilor curentului și tensiunilor care caracterizează regimul în rețeaua electrică cu sarcini distribuite de tip *rL* și *rC* vom utiliza metoda curenților de contur. În calitate de ramuri principale vom defini porțiunile de circuit ce descriu sarcinile racordate la rețea, deci porțiunile *rL* și *rC*. În fig. 1 se prezintă schema echivalentă a unui astfel de circuit. Componentele în care are loc disiparea energiei (pierderi) le vom nota prin *r* cu indicii respectivi, de exemplu r_E (sursa), $r_{01}, r_{12}, \dots, r_{n-1,n}$ (porțiuni de rețea), r_C (sarcină cu caracter capacitiv), r_L (sarcină cu caracter inductiv).

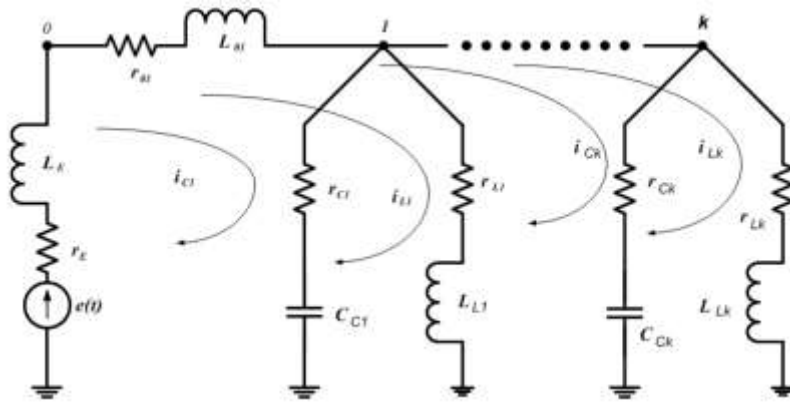


Fig. 1. Schema echivalentă a linii cu sarcini RLC

Ecuțiile diferențiale ale circuitului cu sarcini electrice distribuite

Pentru orice contur din circuitul din fig.1 se pot scrie ecuațiile echilibrului tensiunii în formă diferențială pentru orice punct sau nod de record a sarcinilor. Vom examina pentru ilustrare o variantă simplită pentru care numărul nodurilor de conexiune ale sarcinilor $n=1$. Porțiunile de circuit între nodurile vecine $n-1$ și n sunt prezentate de porțiunile de circuit cu parametrii $r_{n-1,n} L_{n-1,n}$, deci pentru $n=1$ avem cazul $r_{01} L_{01}$. Sursa de alimentare este caracterizată de parametrii r_E și L_E .

Pentru contururile parcurse de curentii i_{C1} și i_{L1} și condiții nenule inițiale sunt valabile următoarele ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned} (r_E + r_{01} + r_{C1})i_{C1} + (L_E + L_{01}) \frac{di_{C1}}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_{C1} dt + u_{C1}(0) &= e(t) \\ (r_E + r_{01} + r_{L1})i_{L1} + (L_E + L_{01} + L_{L1}) \frac{di_{L1}}{dt} &= e(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Notăm mărimile în sistemul de ecuații mărimile astfel: $r_E + r_{01} + r_{C1} = R_{C1}$, $r_E + r_{01} + r_{L1} = R_{L1}$, $L_E + L_{01} = L_{C1}$, $L_E + L_{01} + L_{L1} = L_{L1}$.

În caz general sistemul de ecuații (1) pentru punctul de conexiune k se va prezenta de sistemul de ecuații integro diferențiale:

$$\begin{aligned} R_{Ck} i_{Ck} + (L_E + \sum_{k=1}^n L_{0k}) \frac{di_{Ck}}{dt} + \frac{1}{C_{Ck}} \int_0^t i_{Ck} dt + \sum_{k=1}^n u_{Ck}(0) &= e(t) \\ R_{Lk} i_{Lk} + (L_E + \sum_{k=1}^n L_{0k} + L_{Lk}) \frac{di_{Lk}}{dt} &= e(t), \end{aligned} \quad (2)$$

în care $k = 1, 2, \dots, N$ - numărul de ordine a punctului de racordare a circuitului longitudinal (fiderului).

Pentru cazul $k=1$ sistemul de ecuații (2) pentru condiții inițiale nenule coincide cu sistemul (1).

Calcularea valorilor imaginilor curenților prin porțiunile transversale ale circuitului

Utilizând transformanta Laplace, sistemul de ecuații (2), pentru condiții inițiale nenule se transformă într-un sistem de ecuații algebrice, care ne permite să calculăm valorile imagine $I_{Ck}(p)$ și $I_{Lk}(p)$ a curenților circuitelor în schema echivalentă din fig.1.

$$\begin{aligned} R_{Ck} I_{Ck}(p) + (L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k}) [p I_{Ck}(p) - i_{Ck}(0)] + \frac{1}{p C_{Ck}} I_{Ck}(p) + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n u_{Ck}(0) &= E(p) \\ R_{Lk} I_{Lk}(p) + (L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k} + L_{Lk}) [p I_{Lk}(p) - i_{Lk}(0)] &= E(p). \end{aligned} \quad (3)$$

Gruparea termenilor din sistemul de ecuații (3) ne permite să obținem relațiile următoare:

$$I_{Ck}(p) \left[(L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k}) C_{Ck} p^2 + R_{Ck} C_{Ck} p + 1 \right] = \left[E(p) + (L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k}) i_{Ck}(0) - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n u_{Ck}(0) \right] C_k p \quad (4)$$

$$I_{Lk}(p) \left[p(L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k} + L_{Lk}) + R_{Lk} \right] = E(p) + (L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k} + L_{Lk}) i_{Lk}(0).$$

Vom nota coeficienții de pe lângă variabilele necunoscute astfel:

$$Z_{Cn}(p) = (L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k}) C_{Cn} p^2 + R_{Cn} C_{Cn} p + 1; \quad Z_{Ln} = p(L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k} + L_{Ln}) + R_{Ln}, \text{ în care } n=1,2,\dots,N.$$

Ecuțiile (4) permit calcularea valorilor imaginilor $I_{Cn}(p), I_{Ln}(p)$ funcțiilor original i_{Ck} și i_{Lk} pentru toți curenții din porțiunile transversal ale circuitului cu sarcini distribuite, inclusiv și pentru regimul de compensare locală a puterii reactive în punctul de racordare.

Pentru a calcula valorile imaginilor curenților în porțiunile transversale, care sunt variabile independente, vom utiliza relația matricială:

$$B(p)X(p) = Y(p), \quad (5)$$

în care

$$X(p) = (I_{C1}(p), I_{L1}(p), I_{C2}(p), I_{L2}(p), \dots, I_{Ck}(p), I_{Lk}(p), \dots, I_{Cn}(p), I_{Ln}(p))^T - \text{matricea transponată a}$$

mărimilor variabilelor necunoscute;

$$Y(p) = \left\{ \left[E(p) + (L_E + L_{01} i_{C1}(0) - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n u_{C1}(0)) \right] C_1 p, \left[E(p) + (L_E + L_{01} + L_{L1}) i_{L1}(0) \right], \right.$$

$$\left. \left[E(p) + (L_E + i_{C2}(0) * \sum_{k=1}^2 L_{k-1,k} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^2 u_{Ck}(0)) \right] C_2 p, \left[E(p) + (L_E + \sum_{k=1}^2 L_{k-1,k} + L_{L2}) i_{L2}(0) \right], \dots, \right.$$

$$\left. \left[E(p) + (L_E + i_{Cn}(0) * \sum_{k=1}^n L_{k-1,k} - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n u_{Cn}(0)) \right] C_n p, \left[E(p) + (L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k} + L_{Ln}) i_{Ln}(0) \right] \right\}^T - \text{matricea}$$

transponată a mărimilor cunoscute, sau la utilizarea notării $F_{C1}(p) = E(p) + (L_E + L_{01} i_{C1}(0) - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n u_{C1}(0))$ etc.

obținem

$$Y(p) = [F_{C1}(p), F_{L1}(p), F_{C2}(p), F_{L2}(p), \dots, F_{C,N-1}(p), F_{L,N-1}(p), F_{CN}(p), F_{LN}(p)]^T.$$

Matricea $B(p)$ din ecuația (5) este o matrice patrată diagonal cu impedanțele de contur $Z(p)$:

$$B(p) = \begin{pmatrix} Z_{C1}(p) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & Z_{L1}(p) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Z_{CN}(p) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & Z_{LN}(p) \end{pmatrix} - \text{matrice diagonală patrată a impedanțelor de pe lângă imaginile funcțiilor originale căutate.}$$

Determinantul matricei $B(p)$ este egal cu produsul elementelor diagonalei principale $\det |B| = \prod_{k=1}^N Z_{Ck}(p) Z_{Lk}(p)$. Pentru a determina valorile imaginilor funcțiilor original necunoscute este necesar de calculat determinanții $\det |B_{C,2k-1}|$ și $\det |B_{L,2k}|$, care se obțin din matricea $B(p)$ prin substituirea coloanei k cu coloana $Y(p)$ a termenelor liberi a ecuației (5). Valorile mărimilor calculate se determină după regula lui Cramer:

$$I_{Ck} = \frac{\det |B_{C,2k-1}|}{\det |B|} = \frac{Q_{Ck}(p)}{D_{LC}(p)}; \quad I_{L,2k} = \frac{\det |B_{L,2k}|}{\det |B|} = \frac{Q_{L,2k}(p)}{D_{LC}(p)}, \text{ pentru } k = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (6)$$

În relațiile (6) valorile mărimilor căutate sunt determinate prin raportul a două polinoame de gradul m_C, m_L (polinoamele $Q_{C,2k-1}$ și $Q_{L,2k}(p)$) și polinomul $D_{LC}(p)$ de gradul n . Pentru ca soluția sistemului (6) să existe și să fie unică este necesar ca numărul mărimilor necunoscute să fie egal cu numărul ecuațiilor, iar $\det |B(p)| \neq 0$.

Calcularea valorii funcției imagine a tensiunii în punctul de racord

Determinarea valorii imaginii $U_k(p)$ a tensiunii în punctul k al circuitului se face utilizând valorile mărimilor $I_{Ck}(p)$ și $I_{Lk}(p)$:

$$U_{Ck}(p) = I_{Ck}(p) \left[r_{Ck} + \frac{1}{pC_{Ck}} \right] = \frac{\det |B_{C,2k-1}| (r_{Ck} C_{Ck} + 1)}{\det |B| * pC_{Ck}} = \frac{Q_{C,2k-1}(p) * (r_{Ck} C_{Ck} + 1)}{pC_{Ck} * D_{LC}(p)}; \quad (7)$$

$$U_{Lk} = I_{Lk}(p) (r_{Lk} + pL_{Lk}) = \frac{\det |B_{L,2k}| (r_{Lk} + pL_{Lk})}{\det |B|} = \frac{Q_{L,2k}(p) * (r_{Lk} + pL_{Lk})}{D_{LC}(p)}. \quad (8)$$

Dacă ne referim la matricea cu determinantul $\det |B(p)| = D_{LC}(p) = Z_{C1} Z_{L1} Z_{C2} Z_{L2} \dots Z_{C,N-1} Z_{L,N-1} Z_{CN} Z_{LN} = 0$ polinomul $D_{LC}(p)$ are ordinul $n = 3N$. Deci pentru $N = 3$ gradul polinomului $D_{LC}(p)$ va fi $n = 9$. Calcularea rădăcinilor polinoamelor de grad înalt prezintă o problemă dificilă, dar cunoașterea valorilor rădăcinilor este o condiție necesară pentru a determina expresia analitică a funcției original căutată, de exemplu, evoluția tensiunii în procesul tranzitoriu în punctele de racord ale sarcinilor RLC .

Pentru polinomul $D_{LC}(p)$ rădăcinile se calculează relativ simplu, deoarece acest polinom include grupări similare de componente de gradul doi și de primul grad. Gruparea tipică pentru schema examinată are următoarea structură $(a_2 p^2 + a_1 p + 1)(b_1 p + b_0) = 0$. Determinarea rădăcinilor se reduce la calcularea lor pentru ecuații de tipul $a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0$ și $b_1 p + b_0 = 0$ pentru fiecare din conturul selectat al circuitului prezentat de fig.1.

Din ecuația (4), reiese că pentru punctul de racord k avem: $a_{2k} = (L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k}) C_{Ck} = L_{Ck} C_{Ck}$, $a_{1k} = R_{Ck} C_{Ck}$, $b_{1k} = L_E + \sum_{k=1}^n L_{k-1,k} + L_{Lk} = L_{kLk}$, $b_0 = R_{Lk}$. Rădăcinile ecuației patrate și a ecuației de gradul unu:

$$p_{1,2} = \frac{-R_{Ck} C_{Ck} \pm \sqrt{(R_{Ck} C_{Ck})^2 - 4L_{Ck} C_{Ck} * 1}}{2L_{Ck} C_{Ck}} = \frac{-R_{Ck} \pm \sqrt{R_{Ck}^2 - 4Z_{Ck}^2}}{2L_{Ck}}, \quad p_3 = -\frac{b_0}{b_1} = -\frac{R_{Lk}}{L_{kLk}}. \quad (9)$$

în care $Z_{Ck}^2 = \frac{L_{Ck}}{C_{Ck}}$ - impedanța caracteristica a conturului k .

Mărimile p_1, p_2, p_3 sunt determinate de parametrii RLC a conturului k și se definesc ca constante de timp, valorile cărora se calculează din relațiile (14) și (15).

Relațiile (10)-(15) ne permit să determinăm în formă analitică funcțiile originale $u_{Ck}(t), u_{Lk}(t)$ a evoluției tensiunii în toate punctele de racord la circuit ale sarcinilor $r_{Ck} C_{Ck}, r_{Lk} L_{Lk}$, caracterizate de factorul de putere $\cos \varphi_{Lk} \neq \cos \varphi_{Ck} \neq 1$.

Soluția analitică

Vom examina cel mai simplu caz $n=1$ pentru condițiile inițiale nule. Din ecuația (7) obținem:

$$I_{1C1}(p) [L_{1C1} C_{1C1} p^2 + R_{1C1} C_{1C1} p + 1] = F_1(p) C_{1C1} p \quad (10)$$

$$I_{1L1}(p) [pL_{1L1} + R_{1L1}] = F_1(p).$$

După formula lui Cramer calculăm curenții:

$$I_{1C1}(p) = \frac{\det |B_{1C1}(p)|}{\det |B_1(p)|}, \quad I_{1L1}(p) = \frac{\det |B_{1L1}(p)|}{\det |B_1(p)|}, \quad (11)$$

ceea ce ne permite să determinăm și valorile tensiunilor în punctul de racord a sarcinilor rC și rL , deci

$$U_{1C1}(p) = I_{1C1}(p) \left[r_{C1} + \frac{1}{pC_{C1}} \right] = \frac{F_1(p)(r_{C1}C_{C1}p + 1)}{(L_{1C1}C_{1C1}p^2 + R_{1C1}C_{1C1}p + 1)},$$

$$U_{1L1} = I_{1L1}(p)[(r_{L1} + pL_{L1})] = \frac{F_1(p)(r_{L1} + pL_{L1})}{pL_{L1} + R_{L1}}.$$

Deoarece $f(t) = e(t) = E_m \sin \omega t$, avem $F_1(p) = \frac{E_m(p)}{p^2 + \omega^2}$ și după substituiri în (11), (12) transformări obținem relațiile de calcul imaginilor funcțiilor curenților:

$$I_{1C1}(p) = E_m \frac{\omega p C_{1C1}}{p(p^2 + \omega^2)(L_{1C1}C_{1C1}p^2 + R_{1C1}C_{1C1}p + 1)} = E_m \frac{Q_{1C1}(p)}{D_{1C1}(p)},$$

$$I_{1L1}(p) = E_m \frac{\omega}{p(p^2 + \omega^2)(pL_{L1} + R_{L1})} = E_m \frac{Q_{1L1}(p)}{D_{1L1}(p)}.$$

și tensiunilor

$$U_{1C1}(p) = E_m \frac{\omega(r_{C1}C_{C1}p + 1)}{p(p^2 + \omega^2)(L_{1C1}C_{1C1}p^2 + R_{1C1}C_{1C1}p + 1)} = E_m \frac{Q_{1C1}}{D_{1C1}(p)},$$

$$U_{1L1} = E_m \frac{\omega(r_{L1} + pL_{L1})}{p(p^2 + \omega^2)(pL_{L1} + R_{L1})} = E_m \frac{Q_{1L1}(p)}{D_{1L1}(p)}.$$

Pentru obținerea funcțiilor original $i_{1C1}(t)$, $i_{1L1}(t)$, $u_{1C1}(t)$, $u_{1L1}(t)$ este necesar de determinat rădăcinile polinoamelor $D_{1C1}(p) = p(p^2 + \omega^2)(L_{1C1}C_{1C1}p^2 + R_{1C1}C_{1C1}p + 1) = 0$, $D_{1L1}(p) = p(p^2 + \omega^2)(pL_{L1} + R_{L1}) = 0$. Aceste polinoame au câte o rădăcină $p_{1C1} = p_{1L1} = 0$, respectiv rădăcinile $p_{(2,3)C1}$ și $p_{(2,3)L1}$ coincid și se calculează din relațiile: $p^2 + \omega^2 = 0$, deci $p_{(2,3)C1} = p_{(2,3)L1} = \pm j\omega$ sau $p_{2C1} = p_{2L1} = j\omega$, $p_{3C1} = p_{3L1} = -j\omega$. Ecuația

$$L_{1C1}C_{1C1}p^2 + R_{1C1}C_{1C1}p + 1 = 0 \quad \text{are} \quad \text{rădăcinile} \quad p_{4C1} = \frac{-R_{1C1} + \sqrt{(R_{1C1})^2 - 4(Z_{1C1})^2}}{2L_{1C1}} \quad \text{și}$$

$$p_{5C1} = \frac{-R_{1C1} - \sqrt{(R_{1C1})^2 - 4(Z_{1C1})^2}}{2L_{1C1}}. \quad \text{Rădăcina polinomului } pL_{L1} + R_{L1} = 0 \text{ este egală } p_{4L1} = -\frac{R_{L1}}{L_{L1}}.$$

Funcțiile original a mărimilor necunoscute se determină din relațiile:

$$i_{1C1}(t) = E_m \sum_{j=1}^5 \frac{\omega p_j C_{1C1}}{[(p_j^2 + \omega^2)(L_{1C1}C_{1C1}p_j^2 + R_{1C1}C_{1C1}p_j + 1) + p_j^2 p_j (L_{1C1}C_{1C1}p_j^2 + R_{1C1}C_{1C1}p_j + 1)]} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{e^{p_j t}}{p_j(p_j^2 + \omega^2)(2L_{1C1}C_{1C1}p_j + R_{1C1}C_{1C1})}$$

$$i_{1L1}(t) = E_m \sum_{j=1}^4 \frac{\omega}{[(p_j^2 + \omega^2)(p_j L_{L1} + R_{L1}) + p_j^2 p_j (p_j L_{L1} + R_{L1}) + p_j(p_j^2 + \omega^2)L_{L1}]} e^{p_j t}$$

$$u_{1C1}(t) = E_m \sum_{j=1}^5 \frac{\omega(r_{C1}C_{C1}p_j + 1)}{[(p_j^2 + \omega^2)(L_{1C1}C_{1C1}p_j^2 + R_{1C1}C_{1C1}p_j + 1) + p_j^2 p_j (L_{1C1}C_{1C1}p_j^2 + R_{1C1}C_{1C1}p_j + 1)]} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{e^{p_j t}}{p_j(p_j^2 + \omega^2)(2L_{1C1}C_{1C1}p_j + R_{1C1}C_{1C1})}$$

$$u_{1L1}(t) = E_m \sum_{j=1}^4 \frac{\omega(r_{L1} + p_j L_{L1})}{[(p_j^2 + \omega^2)(p_j L_{L1} + R_{L1}) + p_j^2 p_j (p_j L_{L1} + R_{L1}) + p_j(p_j^2 + \omega^2)L_{L1}]} e^{p_j t}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Вебер Э. Переходные процессы в линейных цепях. Том 1. Цепи с сосредоточенными параметрами, двухполюсникию перевод с английского Гуревича Е.И. и Слуцкого В.В. под ред. Теумина И.И. М.: изд. «Советское радио», 1958. -392 с.
2. Бессонов Л.А. Телретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1978.-528с.
3. Переходные процессы в линейных электрических цепях. Классический метод расчета переходных процессов. http://www.ups-info.ru/for_partners/library/teoreticheskie_osnove_elektrotehniki