ANALIZA EMPIRICĂ A REȚELELOR SERIE-PARALEL VERSUS PARALEL-SERIE CU METODA MONTE CARLO PENTRU DISTRIBUȚIA EXPONENȚIALĂ A ELEMENTELOR REȚELELOR

Veronica ANDRIEVSCHI-BAGRIN*

Departamentul ISA, Facultatea CIM, Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

*Autorul corespondent: Veronica Andrievschi-Bagrin, e-mail: veronica.bagrin@ati.utm.md

Coordonator științific: Alexei LEAHU, dr., conf.univ., UTM

Rezumat. *Lucrarea dată prezintă o analiză empirică a fiabilității a două tipuri de rețele, din punct de vedere arhitectural, Serie-Paralel și Paralel-Serie. Rețelele date au același număr prestabilit de elemente pentru fiecare exemplu studiat și numărul de subrețele este egal pentru ambele modele, unica diferență fiind arhitectura de conectare. Analiza analitică a fost efectuată anterior, pentru care s-au dedus formule, s-au construit grafice și s-a făcut comparația lor. Urmează aceste rezultate să fie validate prin metoda Monte Carlo, ceea ce este descris și analizat în continuare. Așa cum unitățile rețelelor au durata vieții exprimate prin variabile aliatoare independente identic distribuite, va fi aleasă distribuția exponențială pentru care se vor valida datele analitice și se vor scrie concluzii. Pentru simularea Monte Carlo a fost dezvoltat un produs program în limbajul de programare Python și librăriile acestuia. Toate datele rezultate simulării sunt prezentate în tabele și funcțiile vizualizate cu ajutorul graficelor. Produsul program realizat are capacitatea de a fi extins pentru diferite distribuții și desigur pentru diferite arhitecturi de rețele ce va da posibilitatea de a analiza o gamă largă de modele dinamice mai complexe.*

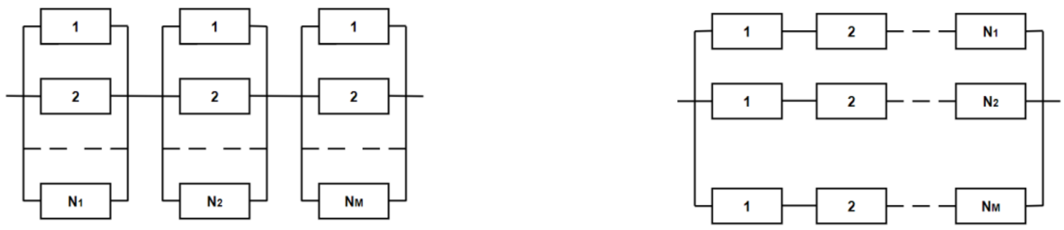
Cuvinte cheie*: distribuții, funcție de distribuție cumulativă, funcție de supraviețuire, .*

Introducere

Fiabilitatea rețelelor este un domenniu important pentru mulți proiectanți, cercetători și ingineri din domeniul tehnologiei informaționale și telecomunicațiilor. În acest sens, au fost deduse ecuații pentru calcularea fiabilității rețelelor de tip serie-paralel și paralel-serie, luând în considerare numărul constant de unități și sub-rețele și presupunând că durata de viață a acestora este distribuită aleatoriu și independent [1].

În mod particular, s-a demonstrat că, în cazul în care durata de viață a unităților este o variabilă aliatoare, independentă, identic distribuită, proprietatea unei rețele de a fi mai fiabilă decât alta nu depinde de funcția de distribuție a duratei de viață. Această concluzie a fost dedusă în lucrarea anterioară și este susținută de exemplele prezentate [2]. De asemenea, s-a arătat că, în cazul particular în care numărul de sub-rețele este mai mare decât 1 și sub-rețeaua cu cel mai mic număr de unități depășește acest număr, rețelele serie-paralel de tip A sunt întotdeauna mai fiabile decât rețelele paralel-serie de tip B.

Analiza fiabilității rețelelor, în lucrarea dată, ține de analiza arhitecturală a acestora. Va fi analizate două arhitecturi principale, care se găsesc în majoritatea cazurilor la proiectarea rețelelor și pot fi găsite sau reduse din rețele mai complexe. O rețea complexă în foarte multe cazuri, din viața reală, poate fi descompusă sau prezentată prin structuri mai simple precum structurile serie-paralel și/sau paralel-serie. În Fig. 1 sunt prezentate schematic arhitecturile de rețele studiate. Aici avem schemele A și B cu un număr M de subrețele în fiecare rețea și N_k elemente pentru fiecare subrețea, unde $k = 1, 2, ..., M$



A - Serial-Parallel Network scheme. ***B*** - Parallel-Serial Network scheme.

Figure 1. Serial-parallel and parallel-serial schemes

În lucrările [2-4] s-au analizat arhitecturile A și B analitic și au fost deduse formule pentru funcțiile de distribuție cumulative pentru ambele arhitecturi. Aceste formule au servit drept bază pentru deducerea funcțiilor de supraviețuire a acestora. În continuare, în lucrarea curentă aceste formule au fost analizate analitic pentru diferite distribuții ale elementelor rețelei și anule distribuția uniformă și distribuția exponențială, și s-au comparat pentru arhitecturile A și B.

1. Analiza analitică și empirică a fiabilității rețelelor de tip Serie-Paralel și Paralel-Serie pentru distribuția uniformă a elementelor acestora

Luând la baza cercetării lucrările preventive la capitolul dat [2-5] avem drept punct de pornire formulele deduse analitic pentru modele matematice mai complicate, precum ar fi rețelele de tip A și B, dar totuși ne ținem la moment de cazul când numerele N_k, k = 1, 2, ..., M și M sunt numere naturale, aceleași fiind pentru ambele modele. A fost luat drept timp de viață a tuturor elementelor componente rețelelor variabile aleatoare independente, cu valori non-negative (v.a.i.) X_{kj} cu funcția de distribuție cumulativă $F_{kj}(x)$ pentru unitatea de pe poziția j a subrețelei k, $j = \overline{1, N_k}$, $k = \overline{1, M}$. Respectiv durata vieții pentru fiecare subrețea pentru ambele modele va fi de asemenea o variabilă aleatoare independentă deoarece reprezintă un minimum sau un maximum din valorile elementelor subrețelei $Y_k = min\ (X_{kl}, X_{k2}, ..., X_{kNk})$, în cazul rețelei paralel-serie, sau $Y_k = max\ (X_{kl}, X_{k2}, ..., X_{kNk})$, în cazul rețelei serie-paralel, $k = \overline{1, M}$. Iar extinderea pentru întreaga rețea obținem $U = min\ (Y_l, Y_2, ..., Y_M)$, respective $V = max\ (Y_l, Y_2, ..., Y_M)$. Analogic au fost deduse formulele pentru funcțiile de distribuție cumulative prezentate în lucrarea [2] redate de formulele (1) și (2) .

$$F_U(x) = P(U \leq x) = 1 - \prod_{k=1}^{M} \left[1 - \prod_{j=1}^{N_k} F_{kj}(x)\right] \tag{1}$$

$$F_V(x) = P(V \leq x) = \prod_{k=1}^{M} \left[1 - \prod_{j=1}^{N_k} (1 - F_{kj}(x))\right] \tag{2}$$

În baza acestor formule s-au dedus ecuațiile pentru funcțiile de fiabilitate a rețelelor de tip A și B.

$$S_{S-P}(X) = P(U > x) = 1 - F_U(x) = \prod_{k=1}^{M} \left[1 - \prod_{j=1}^{N_k} F_{kj}(x)\right] \tag{3}$$

$$S_{P-S}(X) = P(V > x) = 1 - F_V(x) = 1 - \prod_{k=1}^{M} \left[1 - \prod_{j=1}^{N_k} (1 - F_{kj}(x))\right] \tag{4}$$

Pentru a determina care tip de rețea este mai fiabilă este suficient să comparăm funcțiile de fiabilitate $S_{U_M}(x)$, $S_{V_M}(x)$ pentru o distribuție concretă a timpului de viață $F_{kj}(x)$, $j = \overline{1, N_k}$, $k = \overline{1, M}$.

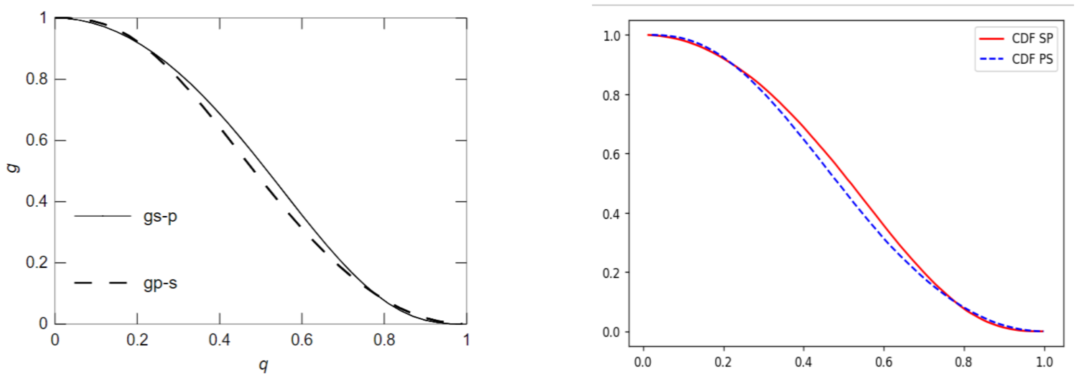
Dacă analizăm cazul în care toate elementele rețelei sunt variabile aleatoare identic distribuite $F_{kj}(x) = F(x)$, $j = \overline{1, N_k}$, $k = \overline{1, M}$ atunci vom avea respectivele formule de calcul a fiabilității redate prin formulele (5) și (6).

$$S_{S-P}(x) = P(U > x) = 1 - F_U(x) = \prod_{k=1}^{M} [1 - (F(x))^{N_k}] \tag{5}$$

$$S_{P-S}(x) = P(V > x) = 1 - F_V(x) = 1 - \prod_{k=1}^{M} [1 - (1 - F(x))^{N_k}] \tag{6}$$

Să analizăm câteva exemple.

Exemplul 1. Vom considera rețelele de tip serie-paralel și paralel-serie $M = 3$ subrețele fiecare și $N_1 = 4$, $N_2 = 2$, $N_3 = 2$ numărul de elemente în fiecare subrețea respective. Pentru distribuția uniformă a v.a.i.i.d a elementelor rețelelor vom compara din lucrările anterioare [2-4] graficul funcției de distribuție obținut analitic și graficul funcției de distribuție obținut empiric reprezentat în Fig. 2



Analiza analitică Analiza empirică

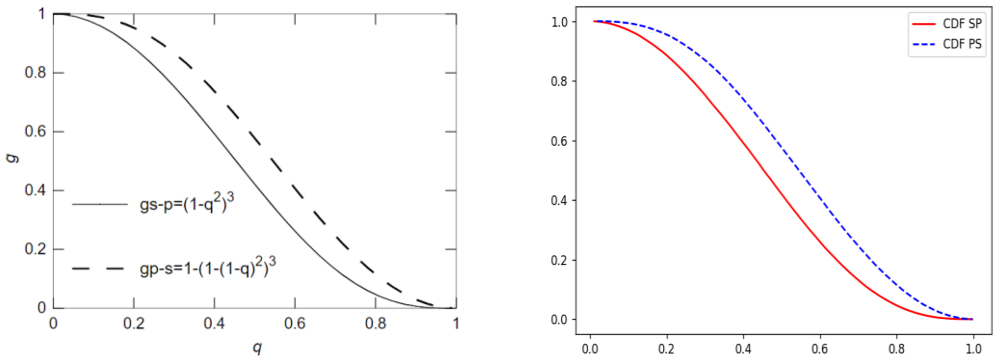
Figura 2. Analiza analitică și empirică pentru distribuția uniformă

După cum se observă rezultatele obținute prin metode Monte Carlo, cel empiric, este întrutotul identic celui obținut pe cale analitică, ceea ce validează corectitudinea formulelor deduse și comportamentul acestora.

Vom analiza următorul exemplu, de data aceasta cu numărul de elemente în fiecare subrețea mai mic decât numărul de subrețele.

Exemplul 2. Vom considera rețelele de tip serie-paralel și paralel-serie $M = 3$ subrețele fiecare și $N_1 = 2$, $N_2 = 2$, $N_3 = 2$ numărul de elemente în fiecare subrețea respective. Pentru distribuția uniformă a v.a.i.i.d a elementelor rețelelor vom compara din lucrările anterioare [2-4] graficul funcției de distribuție obținut analitic și graficul funcției de distribuție obținut empiric reprezentat în Fig. 3

De asemenea obținem rezultatul dorit de validare a formulelor obținute pe cale analitică și obținem un succes în lansarea produsului deprogram de simulare prin metode Monte Carlo a fiabilității rețelelor.



Analiza analitică Analiza empirică

Figura 3. Analiza analitică și empirică pentru distribuția uniformă

2. Analiza analitică a funcțiilor de distribuție deduse pentru fiabilitatea rețelelor de tip Serie-Paralel și Paralel-Serie pentru distribuția exponențială,

În continuare se va considera analiza comparativă a rețelelor la fiabilitate pentru cazul distribuției exponențiale pentru toate elementele rețelelor. Ca și în cazul uniform [2], am dedus formula funcției de distribuție pentru fiecare exemplu individual. Cu instrumentul Wolfram Alpha sau calculat funcțiile densității distribuției. Vom arăta că aceasta îndeplinește condițiile funcțiilor de densitate. Vom calcula media și varianța modelului dat, pentru fiecare exemplu. După aceea, vom compara aceste date cu rezultatele empirice obținute. În continuare analiza empirică se face în mediul de programare Python, folosind bibliotecile relevante pentru simularea metodelor Monte Carlo, iar eșantionul analizat va fi ales în număr de n_0=100000 de încercări.

Să analizăm primul exemplu.

Exemplul 1. Vom considera rețelele de tip serie-paralel și paralel-serie $M=3$ subrețele fiecare și $N_1 = 4$, $N_2 = 2$, $N_3 = 2$ numărul de elemente în fiecare subrețea respective. Pentru distribuția exponențială a v.a.i.i.d a elementelor rețelelor vom analiza funcțiile de distribuție obținute analitic pentru acest model.

Pentru respectivul model luând drept distribuție pentru fiecare v.a.i.i.d ale rețelelor distribuția exponențială cu parametrul **λ = 1,** obținem formulele pentru funcția de distribuție a rețelei, funcția densității de distribuție, media și varianța acestora cu ajutorul instrumentului recunoscut Wolfram Alpha. Rezultatele fiind prezentate în Fig. 4 pentru tipul de rețea Serie-Paralel și în Fig. 5 pentru tipul de rețea Paralel-Serie.

$$\frac{d}{dx}\left(1-\left(1-\left(1-e^{-x}\right)^4\right)\left(1-\left(1-e^{-x}\right)^2\right)^2\right) = 4\,e^{-8x}\left(1-2\,e^{x}\right)^2\left(e^{x}-1\right)\left(-4\,e^{x}+3\,e^{2x}+2\right)$$

$$\int_0^\infty 4\,e^{-8x}\left(1-2\,e^{x}\right)^2\left(e^{x}-1\right)\left(-4\,e^{x}+3\,e^{2x}+2\right)dx = 1$$

$$\int_0^\infty x\left(4\,e^{-8x}\left(1-2\,e^{x}\right)^2\left(e^{x}-1\right)\left(-4\,e^{x}+3\,e^{2x}+2\right)\right)dx = \frac{229}{280} \approx 0.81786$$

$$\int_0^\infty (x-0.81786)^2\left(4\,e^{-8x}\left(1-2\,e^{x}\right)^2\left(e^{x}-1\right)\left(-4\,e^{x}+3\,e^{2x}+2\right)\right)dx = 0.257501$$

Figura 4. Rezultatele obținute pentru modelul Serie-Paralel

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-e^{-4x}\right)\left(1-e^{-2x}\right)^2\right) = 4\,e^{-8x}\left(-3\,e^{2x}+e^{6x}+2\right)$$

$$\int_0^\infty 4\,e^{-8x}\left(-3\,e^{2x}+e^{6x}+2\right)dx = 1$$

$$\int_0^\infty x\left(4\,e^{-8x}\left(-3\,e^{2x}+e^{6x}+2\right)\right)dx = \frac{19}{24} \approx 0.79167$$

$$\int_0^\infty (x-0.79167)^2\left(4\,e^{-8x}\left(-3\,e^{2x}+e^{6x}+2\right)\right)dx = 0.293403$$

Figura 5. Rezultatele obținute pentru modelul Paralel-Serie

Vom analiza următorul exemplu 2, de data aceasta cu numărul de elemente în fiecare subrețea mai mic decât numărul de subrețele.

Exemplul 2. Vom considera rețelele de tip serie-paralel și paralel-serie $M=3$ subrețele fiecare și $N_1 = 2$, $N_2 = 2$, $N_3 = 2$ numărul de elemente în fiecare subrețea respective. Pentru distribuția exponențială a v.a.i.i.d a elementelor rețelelor vom analiza funcțiile de distribuție obținute analitic pentru acest model.

La fel ca și în exemplu 1, modelul curent va fi analizat cu ajutorul instrumentului recunoscut Wolfram Alpha, luând drept distribuție pentru fiecare v.a.i.i.d ale rețelelor distribuția exponențială cu parametrul **λ = 1.** Obținem formulele pentru funcția de distribuție a rețelei, funcția densității de distribuție, media și varianța acestora. Rezultatele fiind prezentate în Fig. 6 pentru tipul de rețea Serie-Paralel și în Fig. 7 pentru tipul de rețea Paralel-Serie.

$$\frac{d}{dx}\left(1-\left(1-\left(1-e^{-4x}\right)^4\right)\left(1-\left(1-e^{-4x}\right)^2\right)^2\right) =$$
$$16\,e^{-32x}\left(1-2\,e^{4x}\right)^2\left(e^{4x}-1\right)\left(-4\,e^{4x}+3\,e^{8x}+2\right)$$
$$\int_0^\infty 16\,e^{-32x}\left(1-2\,e^{4x}\right)^2\left(e^{4x}-1\right)\left(-4\,e^{4x}+3\,e^{8x}+2\right)dx = 1$$
$$\int_0^\infty x\left(16\,e^{-32x}\left(1-2\,e^{4x}\right)^2\left(e^{4x}-1\right)\left(-4\,e^{4x}+3\,e^{8x}+2\right)\right)dx = \frac{229}{1120} \approx 0.20446$$
$$\int_0^\infty (x-0.20446)^2\left(16\,e^{-32x}\left(1-2\,e^{4x}\right)^2\left(e^{4x}-1\right)\left(-4\,e^{4x}+3\,e^{8x}+2\right)\right)dx =$$
$$0.0160938$$

Figura 6. Rezultatele obținute pentru modelul Serie-Paralel

$$\frac{d}{dx}\left(\left(1-e^{-4\times 4x}\right)\left(1-e^{-2\times 4x}\right)^2\right) = 16\,e^{-32x}\left(e^{8x}-1\right)^2\left(e^{8x}+2\right)$$
$$\int_0^\infty 16\,e^{-32x}\left(e^{8x}-1\right)^2\left(e^{8x}+2\right)dx = 1$$
$$\int_0^\infty x\left(16\,e^{-32x}\left(e^{8x}-1\right)^2\left(e^{8x}+2\right)\right)dx = \frac{19}{96} \approx 0.19792$$
$$\int_0^\infty (x-0.19792)^2\left(16\,e^{-32x}\left(e^{8x}-1\right)^2\left(e^{8x}+2\right)\right)dx = 0.0183377$$

Figura 7. Rezultatele obținute pentru modelul Paralel-Serie

Concluzii

În concluzie, putem spune că analizând media duratei vieții rețelelor nu putem trage o concluzie cu privire la fiabilitatea unei rețele de un tip în comparație cu alta deoarece avem situații care confirm acest fapt. Funcția de fiabilitate în schimb conține mai multe informații decât doar media și poate ajuta la identificarea situațiilor în care un sistem este mai fiabil sau nu decât altul. De asemenea, fiabilitatea rețelelor nu se schimbă în funcție de distribuția duratei vieții a elementelor rețelei, ci numai arhitectura rețelelor analizate în raport cu numărul de elemente în subrețele și numărul de subrețele este importantă. Analiza noastră empirică a relevat de asemenea că proprietatea unei rețele de a fi mai fiabilă decât cealaltă nu depinde de funcția de distribuție a duratei de viață a elementelor. În final, concluziile noastre bazate pe modele dinamice generalizează concluziile altor autori bazate pe modele statice.

În concluzie, lucrarea noastră aduce cercetări în domeniul fiabilității rețelelor și ar putea fi utilizată în dezvoltarea de rețele mai fiabile și robuste, având drept scop asigurarea a o mai bună performanță și fiabilitate a rețelelor.

Mulțumiri

Aduc sincere mulțumiri dlui Dr., prof. univ. Alexei LEAHU, conducătorul meu științific, pentru suportul acordat și timpul dedicat lucrării. De asemenea aș vrea să menționez că această lucrare a fost susținută de proiectul 20.80009.5007.26 „Modele, algoritmi și tehnologii de conducere, optimizare și securizare a sistemelor Ciber-Fizice”.

Referințe

1. KAPUR, K.C., LAMBERSON, L.R. *Reliability in engineering design.* India: Wiley, 2009; pp. 75-94.

2. ANDRIEVSCHI-BAGRIN, V., LEAHU, A. Reliability of Serial-Paralel networks vs Reliability of Paralel-Serial networks with constant numbers of sub-networks and units. In: *The Journal of Engineering Science*, 2022, XXIX (4), UTM, Chișinău. https://jes.utm.md/category/vol-xxix-4-2022
3. LEAHU, A., ANDRIEVSCHI-BAGRIN, V. Lifetime Distributions and their Approximation in Reliability of Serial/Parallel Networks. In; *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta - Seria Matematica*, 22.09.2020, 28 (2), pp. 161-172. https://sciendo.com/article/10.2478/auom-2020-0025
4. LEAHU, A., ANDRIEVSCHI-BAGRIN, V., CIORBĂ, D., FIODOROV. I. Min(max-psd) and max(min-psd) as lifetime distributions in network's reliability. In: *Analele științifice ale Universitatii "Ovidius" Constanta - Seria Matematic*. 08.10.2022, V30, pp. 173-184. https://sciendo.com/article/10.2478/auom-2022-0039
5. BARLOW, R. E., PROSCHAN, F. *Mathematical Theory of Reliability*. New York, USA: Wiley, 1965; pp. 5-9.