

APLICAREA CORELAȚIEI DINTRE CÂMPUL DE ACCELERAȚII ȘI CÂMPUL CINETOSTATIC LA MIȘCAREA STRUCTURILOR MECANICE NONDESMODROME

V. A. Aramă (Panțuru)

Universitatea „Dunărea de jos” din Galați

1. INTRODUCERE

Simularea mișcării pe calculator a mișcării unui lanț cinematic poate fi realizată în mai multe moduri:

- a) Rezolvarea analitică sau numerică a unui sistem de ecuații diferențiale (metodologia clasică);
- b) Calculul cu ajutorul unor algoritmi distincți, numerici.

În cadrul *modelelor matematice directe* mărimile de intrare sunt mărimile independente cu care poate fi determinată starea unui sistem mobil la fiecare iterație. Ele sunt: constantele sistemului, un număr N_c de parametri de poziție, un număr $N_v = N_c$ de parametri de viteze și un număr N_f de forțe (și / sau momente). La sistemele mobile desmodrome $N_c = N_v = M$, iar la sistemele nondesmodrome $N_c = N_v < M$.

În cadrul *modelelor matematice inverse* mărimile de intrare sunt mărimile independente cu care poate fi determinată starea lanțului cinematic la fiecare iterație. Ele sunt: constante sistemului, un număr M de parametri de poziție, un număr M de parametri de viteze și un număr M de parametri de accelerații, atât la sistemele desmodrome, cât și la cele nondesmodrome, incrementul de timp.

Modelele matematice directe au `n vedere mișcarea lanțului cinematic atunci când este definit câmpul forțelor aplicate `n fiecare moment - direct sau prin intermediul altor mărimi de stare.

Modelul matematic direct implică:

- Condițiile inițiale Cauchy;
- Un număr de "ecuații de rutină" (care sunt modelele matematice inverse) pentru fiecare categorie: poziții, viteze, accelerații.
 - Un număr de relații care țin seama de forțele aplicate;
 - Un număr de relații de trecere între iterații succesive.

Dacă numărul de forțe de condiționare aplicate sistemului mobil nu este suficient pentru satisfacerea bilanțului ecuațiilor cu al necunoscutelor, este necesar să se introducă alte forțe de condiționare (care eventual ar putea juca rolul de forțe de stabilizare a mișcării).

Pentru modelele matematice directe aferente descrierii unui sistem mecanic mobil se constată că sistemul de ecuații algebrice liniare scris pentru câmpul de accelerații și pentru cinetostatică, este un sistem compatibil cu o soluție unică.

2. PRINCIPIUL METODEI

Se consideră un mecanism cu o mobilitate M la care pentru simplificare, nu mai iau în considerare greutatea proprii și nici frecările. Se presupun cunoscute funcțiile care definesc

- cuplul motor

$$Mm_j = F_j(\omega_j) \quad (\forall) j = \{1, 2, \dots\}.$$

- cuplul rezistent

$$Mu = f(\phi_k, \omega_k) \quad (\forall) k = \{1, 2, \dots\}.$$

Modelul matematic este iterativ și se presupune că la amorsarea programului de calcul sunt cunoscute: $\varphi_1^0, \omega_1^0, \varphi_4^0, \omega_4^0$ (în conformitate cu condițiile Cauchy-Kovalevskaja), adică $\varphi_1^i, \omega_1^i, \varphi_4^i, \omega_4^i$ pentru iterația $i, (\forall) i=0, 1, \dots$.

Etapele de aplicare a modelului matematic sunt:

- Se determină:
 - configurația;
 - câmpul de viteze;
- Scriu ecuația (scalară) de închidere a accelerațiilor pentru toate contururile existente;
- Se scrie apoi torsorul de inerție pentru fiecare element `n parte;
- Scriu ecuațiile ce determină câmpul cinetostatic.

Avem câte două ecuații de stare de echilibru dinamic al forțelor și câte o ecuație pentru momente pentru fiecare element.

Dacă se face bilanțul ecuațiilor se obține:

- ⇒ numărul de ecuații scrise pentru calculul cinetostatic $= 3 \times k$;
- ⇒ numărul de ecuații scrise la accelerațiile pe contur # 1;
- ⇒ numărul de ecuații $= 3 \times k + 1, (\forall) k = 1, 2, \dots, n$.

⇒ Necunoscutele sistemului sunt: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k,$
 $\overrightarrow{F}_{01}, \overrightarrow{F}_{12}, \dots$

Numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute deci sistemul format din ecuațiile scrise pentru calculul cinetostatic și pentru accelerațiile pe contur este un sistem compatibil și prin rezolvarea lui se obțin condițiile inițiale pentru iterația următoare.

Pentru iterația zero 0 se culeg $\varepsilon^0_{\text{motor}} = \varepsilon^0_1$ [i se obține prin calcul :

$$\phi_1^i = \phi_1^0 + \omega_1^0 \cdot \Delta t \quad [rad.] \quad (1)$$

$$\omega_1^i = \omega_1^0 + \varepsilon_1^0 \cdot \Delta t.$$

Pentru o iterație i avem: $\phi_j^i, \omega_j^i, (\forall) j = 1 \vee 2 \vee 3 \vee \dots \vee n$ obținute prin calcul la iterația anterioară . Se parcurg aceleași etape ca la iterația zero 0 .

Observații:

◆ Se poate obține o precizie mai mare dacă pentru ϕ se ia o variație parabolică între iterația i și iterația $i+1$.

$$\phi_j^{i+1} = \phi_j^i + \omega_j^i \Delta t + \varepsilon_j^i \Delta t^2 / 2 \quad (\forall) i = 0, 1, \dots (\text{iterația}) \quad (2)$$

$$\omega_j^{i+1} = \omega_j^i + \varepsilon_j^i \Delta t \quad (\forall) j = 1 \vee 2 \vee 3 \vee \dots \vee n \quad (= \text{numărul elementului motor}) \quad (3)$$

◆ Nu există pornire din repaos. Pozițiile inițiale aproximative sunt date grafic.

◆ Alegerea incrementului de timp Δt este arbitrară și corelată cu precizia urmărită și cu modelul de interpolare.

2. STRUCTURA I

2.1. Formularea matematică a problemei, condiții inițiale

Se consideră structura mobilă a unui sistem (fig.1) cu culisa neseparată de arcul stabilizator de mișcare care funcționează într-un interval în care funcția de transmitere este bijectivă .

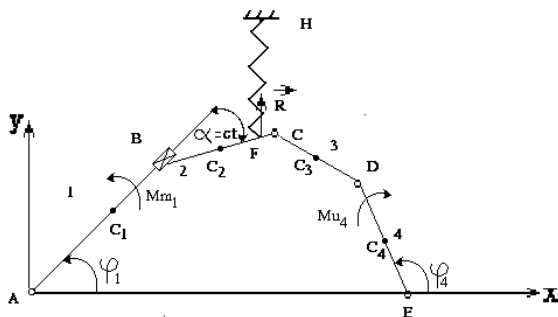


Figura1. Schema cinematică a pentagonului articulat nondesmodrom cu culisa B.

Se cunosc funcțiile corespunzătoare:

- momentului motor $Mm_1(\omega_1),$
- momentului util $Mu(\omega_4),$
- forța de stabilitate

$$\begin{cases} \phi_1^i = \phi_1^0 + \omega_1^0 \cdot \Delta t \\ s_3^i = s_3^0 + v_D^0 \cdot \Delta t \end{cases}$$

Desmodromia sistemului este:

Gradul de mobilitate $M = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2,$ deci mobilitatea este mai mare decât numărul de elemente iar numărul de elemente motoare este 1, ceea ce confirmă că structura este nondesmodromă [1].

Condiții inițiale Cauchy:

Sunt două elemente motoare , deci numărul de condiții Cauchy va fi:

$$| \phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \phi^{(3)}, \dots, \phi^{(n)} \quad (4)$$

Mobilitatea este 2 ceea ce presupune existența condițiilor Cauchy până la derivatele de ordin (n-1).

Pentru cazul nostru avem $n = M = 2$ deci $(n-1) = 2-1=1$ [i vom avea : ϕ_1, ϕ_4 .

Numărul total de Condiții Cauchy pentru această problemă este :

$$\begin{aligned} \{ \phi_1, \dot{\phi}_1, \phi_4, \dot{\phi}_4 \} &= \{ \phi_1, \phi_1', \phi_4, \phi_4' \} = \\ &= \{ \phi_1, \omega_1, \phi_4, \omega_4 \}. \end{aligned} \quad (5)$$

2.2. Modelul matematic și metoda de calcul

După scrierea asamblajelor care descriu simbolic mișcarea acestui sistem prin modelul matematic câmpul accelerațiilor intersectat cu câmpul cinetostatic (A∩C) se realizează bilanțul ecuațiilor și al necunoscutelor în modelul matematic respectiv [2].

În total se pot scrie 15 ecuații = $(4 \times 3 + 1)$ (ecuații câmpul cinetostatic) \wedge 2 (ecuații câmpul accelerațiilor).

Necunoscutele sunt:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{F}_{01}, \overrightarrow{F}_{12}, \overrightarrow{F}_{23}, \overrightarrow{F}_{34}, \overrightarrow{F}_{40} &= 5 \times 2 = 10 \\ M_{12}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 15. \quad (6)$$

Ecuațiile se rezolvă prin metoda iterațiilor:

$$i := i + 1$$

Sistemul are 15 ecuații și 15 necunoscute deci este compatibil. La pasul inițial se dau valorile

pentru : $\varphi_1, \omega_1, \varphi_4, \omega_4$. Prin rezolvarea sistemului se obțin $\varepsilon_1^0, \varepsilon_4^0$.

Din ecuațiile :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{\omega_1^1 - \omega_1^0}{\Delta t} \\ \varepsilon_4^0 &= \frac{\omega_4^1 - \omega_4^0}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^1 = \omega_1^0 + \varepsilon_1^0 \cdot \Delta t \\ \omega_4^1 = \omega_4^0 + \varepsilon_4^0 \cdot \Delta t \end{cases} \quad (7)$$

iar

$$\begin{cases} \phi_1^1 = \phi_1^0 + \omega_1^0 \cdot \Delta t \\ \phi_4^1 = \phi_4^0 + \omega_4^0 \cdot \Delta t \end{cases}$$

unde Δt este incrementul de timp pentru rularea programului (stabilit de programator). Se obțin astfel condițiile Cauchy pentru pasul următor $\varphi_1^1, \omega_1^1, \varphi_4^1, \omega_4^1$

Dacă generalizăm : pentru un pas oarecare i avem condițiile Cauchy rezultate din rezolvarea unui sistem de ecuații ca cel obținut din scrierea asamblajelor care descriu intersecția câmpului accelerațiilor cu câmpul cinetostatic.

Prin rezolvarea sistemului am obținut $\varepsilon_1^i, \varepsilon_4^i$ [5] .

Din ecuațiile :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1^i &= \frac{\omega_1^{i+1} - \omega_1^i}{\Delta t} \\ \varepsilon_4^i &= \frac{\omega_4^{i+1} - \omega_4^i}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (8)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^{i+1} = \omega_1^i + \varepsilon_1^i \cdot \Delta t \\ \omega_4^{i+1} = \omega_4^i + \varepsilon_4^i \cdot \Delta t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi_1^{i+1} = \phi_1^i + \omega_1^i \cdot \Delta t \\ \phi_4^{i+1} = \phi_4^i + \omega_4^i \cdot \Delta t \end{cases} \quad (9)$$

Astfel au fost obținute condițiile Cauchy pentru pasul următor $i+1$: $\varphi_1^{i+1}, \omega_1^{i+1}, \varphi_4^{i+1}, \omega_4^{i+1}$. Un caz mai complex poate servi modelarea dinamică a structurii din figura 2 care este mult aplicat în tehnica modernă (motoare cu ardere internă, compresoare cu piston, acționări hidrogazodinamice a sistemelor de lansare a rachetelor balistice din puțuri).

3. STRUCTURA II

3.1. Formularea matematică a problemei, condiții inițiale

Se consideră structura mobilă din figură 2 cu culisa separată de arcul stabilizator de mișcare care funcționează într-un interval, în care funcția de transmitere este bijectivă .

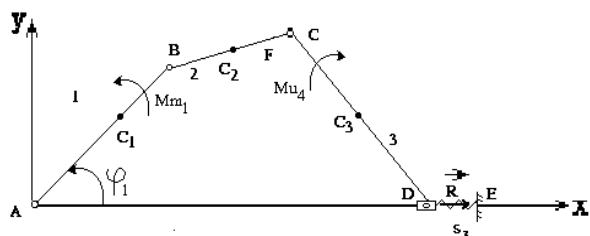


Figura 2 Schema cinematică a pentagonului articulat nondesmodrom cu culisa în D.

Se cunosc funcțiile corespunzătoare :

- momentului motor $Mm_1(\omega_1)$,
- momentului util $Mu(\omega_4)$,
- forța de stabilitate

$$\bar{R} = (C_1 + C_2 \cdot s_3) \frac{DE}{s_3}$$

Desmodromia sistemului este :

- gradul de mobilitate
- $M = 3 \times 4 - 2 \times 5 = 2$, deci mobilitatea este mai mare decât numărul de elemente iar numărul de elemente motoare este 1 ceea ce confirmă ca structura este nondesmodromă [3] .

Condiții inițiale Cauchy

Sunt două elemente motoare deci numărul de Condiții Cauchy este :

$$2 \times [\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(n-1)}] \quad (10)$$

Mobilitatea este 2 ceea ce presupune existența condițiilor Cauchy până la derivatele de ordin $(n-1)$. Pentru cazul nostru avem $n = M = 2$ deci $(n - 1) = 2 - 1 = 1$ și vom avea: $\varepsilon_1^i, \varepsilon_4^i$. Numărul total de condiții Cauchy pentru această problemă sunt :

$$\begin{aligned} \{\varphi_1, \dot{\varphi}_1, s_3, \dot{s}_3\} &= \{\varphi_1, \varphi_1', s_3, s_3'\} = \\ &= \{\varphi_1, \omega_1, s_3, v_D\} \end{aligned} \quad (11)$$

3.2. Modelul matematic și metoda de calcul

După scrierea asamblajelor care descriu simbolic mișcarea acestui sistem prin modelul matematic câmpul accelerațiilor intersectat cu câmpul cinetostatic ($A \cap C$) se realizează bilanțul

ecuațiilor și al necunoscutelor în modelul matematic respectiv.

În total s-au scris 12 ecuații = 10 (9+1) (ecuații câmpul cinetostatic) plus 2 (ecuații câmpul accelerațiilor) [2].

Necunoscutele sunt :

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{01}}, \overrightarrow{F_{12}}, \overrightarrow{F_{23}}, \overrightarrow{F_{03}} = 4 \times 2 = 8 \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ddot{s}_3 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 12$$

Ecuațiile se rezolvă prin metoda iterațiilor:

$$i := i+1.$$

Sistemul are 12 ecuații și 12 necunoscute deci este compatibil. La pasul inițial (iterația zero) se dau valorile pentru : $\varphi_1, \omega_1, s_3, v_D$.

Prin rezolvarea sistemului am obținut: $\varepsilon_1^0, \varepsilon_4^0$.

Din ecuațiile :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1^0 = \frac{\omega_1^1 - \omega_1^0}{\Delta t} \\ \ddot{S}_3^0 = \frac{v_D^1 - v_D^0}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^1 = \omega_1^0 + \varepsilon_1^0 \cdot \Delta t \\ v_D^1 = v_D^0 + \ddot{S}_3^0 \cdot \Delta t \end{array} \right. \quad (12)$$

iar

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1^1 = \varphi_1^0 + \omega_1^0 \cdot \Delta t \\ s_3^1 = s_3^0 + v_D^0 \cdot \Delta t \end{array} \right. , \quad (13)$$

unde Δt este incrementul de timp pentru rularea programului (stabilit de programator). Am obținut astfel condițiile Cauchy pentru pasul următor :

$$\varphi_1^1, \omega_1^1, s_3^1, v_D^1$$

Dacă generalizăm pentru un pas oarecare i avem condițiile Cauchy rezultate din rezolvarea unui sistem de ecuații ca cel obținut din scrierea asamblajelor care descriu intersecția câmpului accelerațiilor cu câmpul cinetostatic. Din ecuațiile

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1^i = \frac{\omega_1^{i+1} - \omega_1^i}{\Delta t} \\ \ddot{S}_3^i = \frac{v_D^{i+1} - v_D^i}{\Delta t} \end{array} \right\} \Rightarrow \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega_1^{i+1} = \omega_1^i + \varepsilon_1^i \cdot \Delta t \\ v_D^{i+1} = v_D^i + \ddot{S}_3^i \cdot \Delta t \end{array} \right. \quad (14)$$

Prin rezolvarea sistemului am obținut: ε_1^0, s_3^0

iar

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1^{i+1} = \varphi_1^i + \omega_1^i \cdot \Delta t \\ s_3^{i+1} = s_3^i + v_D^i \cdot \Delta t \end{array} \right. \quad (15)$$

Am obținut astfel condițiile Cauchy pentru pasul următor $i+1$:

$$\varphi_1^{i+1}, \omega_1^{i+1}, s_3^{i+1}, v_D^{i+1} \quad (16).$$

După scrierea asamblajelor care descriu simbolic mișcarea acestui sistem prin modelul matematic câmpul accelerațiilor intersectat cu câmpul cinetostatic (A∩C) se realizează bilanțul ecuațiilor și al necunoscutelor în modelul matematic respectiv.

În total s-au scris 12 ecuații=10 (9+1) (ecuații câmpul cinetostatic) + 2 (ecuații câmpul accelerațiilor) [3].

4.CONCLUZII

Considerând cele prezentate mai sus, se poate confirma :

- s-a formulat matematic problema pentru două structuri mobile nondesmodrome, una cu culisa separată de arcul stabilizator de mișcare, alta cu culisa neșeparată de arcul stabilizator de mișcare;
- s-au stabilit condițiile inițiale pentru ambele structuri analizate ;
- s-a elaborat metoda de calcul a structurilor nondesmodrome prin metoda iterațiilor.

Bibliografie

1. **Mereuta, E., Rozmerita, Gh.** *Initial conditions influence upon the dynamic response of "undetermined" structures. The Third International Congress Mechanical Engineering Technologies Met' 01, Sofia, Bulgaria, 2001.*
2. **Oranescu, A , Stroe, G.** *The general axiomatic system in relation with the mathematical models of iterative calculation in the field of mobile systems- The Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics - SISOM 2001, Bucharest, pag. 281-284*
3. **Mereuta, E. ,** *Mechanical System Stability Related to the Axiomatic System Proposed ,The Annals of "Dun\rea de Jos" University, Fascicle X Applied Mechanics, 1999, pag. 47-50.*

Recomandat spre publicare:12.07.2008