MODURI DE REPREZENTARE A LINIILOR

Madlen PLUGARU

Departamentul Design Industrial şi de Produs, grupa DJ-221, Facultatea de Design, Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

Îndrumător/coordonator științific: Ion LEAH, Doctor, conferenţiar universitar, Departamentul de Matematică

Rezumat. *Lucrarea descrie modalități de definire a unei linii. Într-un plan, linia poate fi definită ca graficul unei funcții sau graficul unei ecuații. Aceasta poate fi reprezentată ca traiectoria mișcării unui punct sau, mai general, într-un mod parametric. În spațiu, linia poate fi definită ca intersecția a două suprafețe sau într-un mod parametric. Aspectul unei linii poate fi modificat prin modificarea anumitor parametri ai acesteia. Acest lucru este arătat prin exemplul unui astroid.*

Cuvinte cheie: *Coordonate polare, graficul unei funcţii, graficul unei ecuaţii, ecuaţii parametrice.*

Introducere

Elaborat în sec. 17 (mai exact, publicat în 1638) de către Rene Descartes, sistemul ortogonal de coordonate a constituit un punct de cotitură în dezvoltarea matematicii. Studiul multor obiecte geometrice (linii, suprafeţe, figuri) a fost redus la studiul obiectelor algebrice (ecuaţii, inecuaţii) sau la cel al analizei matematice (de exemplu, la studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor). Linia este primul dintre aceste obiecte geometrice. Într-un sistem de coordonate (cartezian sau polar) linia plană poate fi determinată diferit: *explicit* (ca graficul unei funcții), *implicit* (ca graficul unei ecuații), *parametric*. În fiecare caz linia va fi determinată într-un careva sistem de coordonate, existent sau introdus.

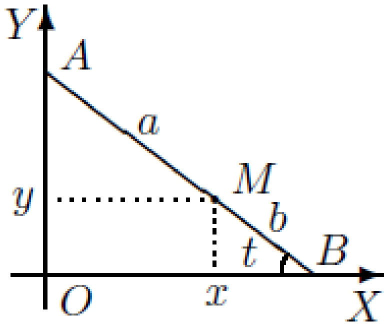
Linia ca loc geometric de puncta

Prin *loc geometric de puncte* se înțelege o mulțime de puncte care posedă o anumită proprietate bine determinată. De exemplu, elipsa se definește ca locul geometric de puncte, suma distanţelor cărora până la două puncte fixe din plan, numite focare, este o mărime constantă, mai mare ca distanţa dintre focare. Introducând în mod firesc un sistem cartezian de coordonate, se deduce ecuația ca-nonică a elipsei, reieșind din care se determină proprietățile elipsei și, în final, reprezentarea ei grafică. Analog se definesc și celelalte linii de ordinul doi – cercul, hiperbola și parabola.

Linia ca traiectoria mişcării unui punct

Asemenea linii se întâlnesc în astronomie, fizică, navigaţie etc. În calitate de exemplu, vom examina următoarea problemă. O scară, pe care este vopsită o treaptă, este lipită vertical de un perete. Scara alunecă cu un capăt pe podea, iar cu celălalt pe perete. Ce linie va descrie treapta vopsită?

Problema se reformulează astfel. Pe un segment se ia un punct M, care împarte segmentul în două părți cu lungi mile a și b. Inițial, segmental aparţine axei OY cu capătul de jos în origine. Segmentul alunecâ cu capetele pe fiecare din axe. Ce linie va descrie punctul M ?



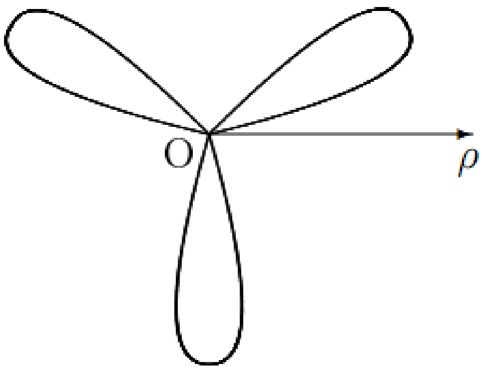
Notând cu *t* unghiul format de segmental *AB* cu axa *OX*, se află coordonatele punctului *M*:

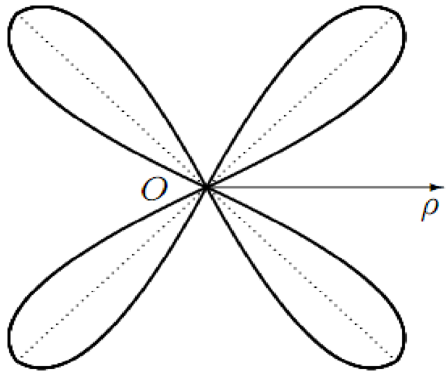
$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

care reprezintă ecuațiile parametrice ale unei elipse. Astfel, punctul *M* va descrie o elipsă.

Linia ca graficul unei funcții. Este cel mai des utilizat mod de a reprezenta o linie în sistemul carte-zian de coordonate. De cele mai multe ori, pentru studiul funcției, deci și pentru construcția graficului se aplică calculul diferențial. Şi în sistemul polar de coordonate linia poate prezenta graficul unei anumite func-ţii $\rho = f(\theta)$. Argumentul acestei funcții este unghiul polar θ, iar funcția este raza polară ρ. Graficul funcției este mulțimea de puncte $M(\rho,\theta)$, unde $\rho = f(\theta)$.

În sistemul polar de coordonate, o linie de asemenea este o mulţime de puncte $M(\rho,\theta)$. Sub forma explicită, o linie poate fe reprezentată de funcţia $\rho = f(\theta)$. În acest sistem, multe funcţii reprezintă linii exotice, care în sistemul cartezian nici nu-şi au locul. De exemplu, în sistemul XOY cercul nu este graficul unei funcţii. În cel polar el este determinat de funcţia simplă $\rho = R$ (R – const.). Alte exemple: funcţiile $\rho = a\sin 3\theta$ ($a > 0$) și $\rho = a|\sin 2\theta|$ reprezintă *rozele cu 3* și respectiv*, cu 4 petale*.





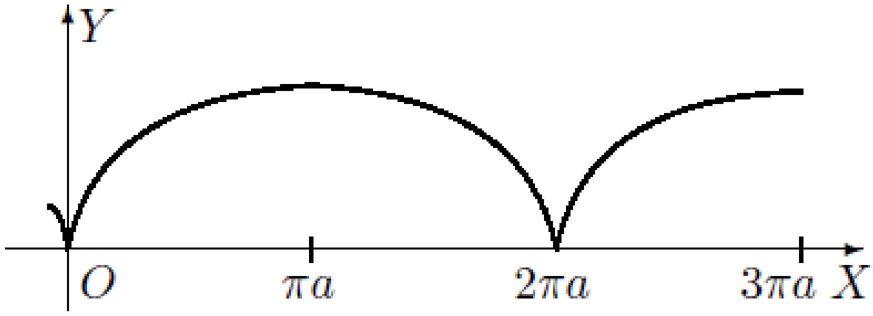
$\rho = a \cdot \sin 3\theta$ $\qquad$ $\rho = a \cdot |\sin 2\theta|$

Dintre alte linii pot fi remarcate spirala lui Arhimede, cardioida, lemniscata lui Bernoulli etc.

Linia, definită parametric

Considerente cinematice sugerează încă o formă de determinare a liniei plană. Privind linia ca traiectoria unui punct material *M*, coordonatele acestuia se prezintă ca funcţii de timpul *t*: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Aceste ecuaţii reprezintă *ecuaţiile parametrice* ale liniei *L*. Variabila *t* se nu-meşte *parametru*; ea poate avea şi alt sens (de exemplu, unghi), dar poate fi lipsită de vre-un sens fizic sau geometric. În calitate de exemple, vom examina două linii: *cicloida* și *astroida*.

Cicloida reprezintă traiectoria mișcării unui punct de pe un cerc de rază *a*, când acest punct se rostogo-lește, fără alunecare, pe un plan orizontal.

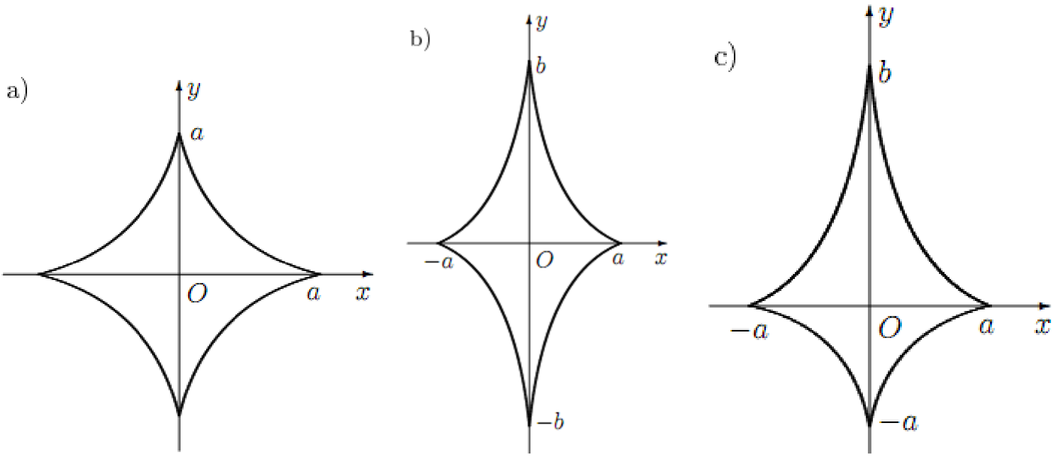


Dacă *t* este unghiul, cu care s-a rostogolit cercul, atunci coordonatele punctului se obțin astfel:

$$x = a(t - \sin t),\ y = b(1 - \cos t).$$

Aceste ecuații reprezintă ecuațiile parametrice ale cicloidei. Din ele nu se poate elimina parametrul real *t*. Deși *y* este funcție de *x*, ea nu poate fi exprimată prin funcții elementare.

Astroida. Această linie este determinată de ecuațiile parametrice $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$, $a > 0$ și



e reprezentată în fig. a). Ea are 4 axe de simetrie (axele de coordonate și bisectoarele cadranelor) și un centru de simetrie – originea de coordonate.

Dacă ecuația a doua se înlocuiește cu $y = b\sin^3 t,$ astroida devine alungită de-a lungul unei axe cum este în fig. b) (pentru $b > a$). În acest caz linia are doar 2 axe de simetrie (axele de coordonate) și centrul de simetrie *O*. Luând câte o gumătate din astroidele cazurilor a) și b), se poate obține linia din cazul c), care are doar o axă de simetrie (axa OY). Acest lucru ar prinde bine dizainerilor.

Linia ca graficul unei ecuații

$F(x, y) = 0$**.** Prin graficul unei ecuații se înțelege mulțimea tuturor punctelor $M(x, y)$, coordonatele cărora satisfac această ecuație. Toate liniile de ordinul doi se construiiesc ca graficele unor ecuații. În calitate de exemplu vom examina *Foliul lui Descartes,* determinat de ecuația $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$. Această linie, deci și ecuația respectivă a fost examinată pentru prima oară de însuși Rene Descartes în 1638 – la doar un an după publicarea lucrării despre sistemul de coordonate. Inițial, el credea că graficul este asemenea rozei cu 4 petale și constă din 4 bucle, identice celei din cadranul 1. Abia în 1692 matematicianul și fizicianul olandez Christian Huygens respinge această presupunere, stabilind asimptota $y = -x - a$ a acestei linii.

O altă problemă, pe care a propus-o Descartes, se referea la trasarea tangentei prin oricare punct al foliu-lui. Rezolvarea a dat-o Pierre de Fermat (1607 – 1665), cunoscut matematician francez. Vom examina un caz particular al acestei tangente – cazul tangentei verticale, considerând parametrul

$a = 1$, ceea ce nu influen-ţează asupra formei graficului. Panta unei tangente la grafic coincide cu derivata funcției în punctul de tan-gență. Pentru tangenta verticală derivata nu există. Din ecuația

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0 \quad (1)$$

vom afla derivata funcției implicite y. Derivăm ambele părți ale ecuației în raport cu variabila x, conside-rând pe y ca funcție de argumentul x:

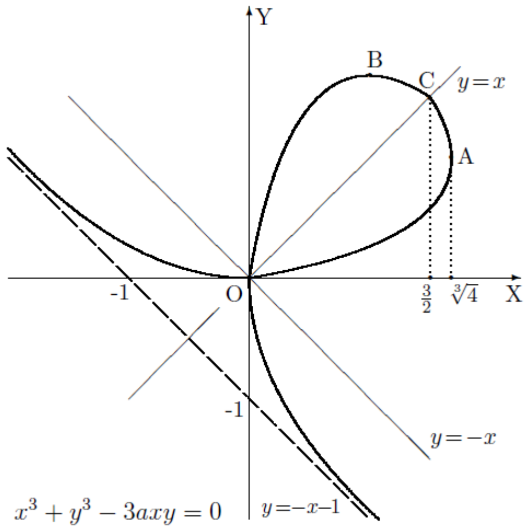
$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0 \Rightarrow x^2 - y + (y^2 - x)y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Derivata obținută nu are sens pentru $y^2 = x$. Substituind în (1) x prin y^2, se obține

$$y^6 + y^3 - 3y^3 = 0 \Rightarrow y^3(y^3 - 2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = \sqrt[3]{2}. \end{array} \right.$$

Soluția $y = 0$ este soluție triplă. Pentru foliu, originea este un punct de autointersecție. Al doilea punct, în care tangenta este verticală, este punctul $A\left(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}\right)$.

Dacă în ecuația foliului se schimbă cu locurile necunoscutele x și y, ecuația nu se schimbă. Dreapta $y = x$ este axă de simetrie pentru această linie. Punând în (1) $y = x$, se obțin punctele $O(0,0)$ și $C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



Ecuația foliului lui Descartes poate fi înlocuită prin ecuații parametrice sau în coordonate polare, respectiv,

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}; \end{cases} \qquad \rho = \frac{3 \sin\theta \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}.$$

Acestea și alte considerente permit construirea mai exactă a Folilului lui Descartes.

Referinţe

1. KLETENIK, D.V. Culegere de probleme de geometrie analitică. M., Nauka, 1967.