Principiul dualităţii în algebra logicii

Ion COJOCARU, Luca ŞERBANAŢI, Bujor PĂVĂLOIU, Alexandru RADOVICI, Andrei VASILOŢEANU
Universitatea POLITEHNICA Bucureşti, Spl. Independenţei 313, RO 77206, Bucureşti
i_coj@yahoo.fr

*Abstract***.** The problem of easy testable digital circuits' design, which appeared in the 60s of the last century, being in the permanent focus of the digital circuits' producers, has not found its adequate solution yet. Complexity of the problem, the insufficient results of design for testability (DFT) for general case and the lack of traditional methods of logical synthesis justify the search of non-traditional solutions in the field of interaction between different scientific directions. The fundament of new design for testing concept is represented by the logical gates couples. Properties of in- and out- signals of these gates couples allow a non-traditional and extremely efficient approach to DFT problem.
Index Terms – logical algebra, logical gates, logical synthesis, testability, duality

I. INTRODUCERE

Materialele conferinţelor şi simpozioanelor internaţionale în domeniul testării şi proiectării pentru testabilitate, dar şi lista celor mai valoroase publicaţii ale acestora sunt o dovadă în plus, că o soluţie adecvată, care să răspundă atât a cerinţelor actuale de proiectare pentru testabilitate (PPT), cât şi performanţelor tehnologiilor moderne de fabricare a circuitelor integrate, continuă să mai fie căutată.

O structură digitală, ca obiect de sinteză, constituie o *reprezentare grafică* a conexiunilor de intrare şi ieşire şi a diverselor tipuri de porţi logice, interconectate într-un mod specific obţinerii la ieşire a unei anumite funcţii logice (FL), necesare unei documentaţii suficient de comprehensibilă atât pentru proiectanţi, cât şi pentru ingineri. Totuşi, pe parcursul majorităţii etapelor de sinteză proiectanţii foloseşte noţiunea de *funcţie logică* sau funcţie *de comutaţie*. O *funcţie logică* este o funcţie, care, la fel ca şi variabilele sale, poate primi doar 2 valori binare din mulţimea B{0, 1}:

$$f(x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \quad , \qquad (1)$$

Cea mai utilizată, dar şi cea mai adecvată interpretare a variabilelor binare este cea logică: "nu"- "da" sau "false" (F) - "adevărat" (A). Algebra, formată din mulţimea B{0, 1} împreună cu toate operaţiile posibile în această mulţime, se numeşte *algebra logicii (AL)*. Mulţimea tuturor funcţiilor logice care depind de *2* variabile se notează de obicei prin P_2, iar mulţimea tuturor FL care depind de *n* variabile se notează de obicei prin $P_2(n)$.
Este evident, că

$$P_2(n) \supseteq P_2 \quad , \qquad (2)$$

În continuare vom considera doar funcţii logice din P_2.
Orice FL poate fi dată de o tabelă, în partea stângă a căreia sunt enumeraţi toţi cei 2^n vectori stimuli binari cu lungimea *n*, iar în partea dreaptă – valorile respective ale funcţiei. De obicei, vectorii variabilelor de intrare sunt aranjaţi în ordine lexicografică (crescătoare), cea ce facilitează studierea anumitor proprietăţi ale funcţiei date. Pentru orice ordonare fixă a 2^n vectori ai variabilelor de intrare FL de *n* variabile este în întregime determinată de vectorul-coloană cu 2^n valori. De aceea numărul $|P_2(n)|$ al diferitor funcţii de *n* variabile este egal cu numărul diferitor vectori binari de lungimea 2^n, *adică*

$$|P_2(n)| = 2^{2^n} , \qquad (3)$$

Astfel, există $2^{2^1} = 4$ FL cu o variabilă are (tabela 1).

Tabela 1. Funcţii logice de o variabilă

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Aceste funcţii sunt triviale şi nu prezintă interes.

2. ANALIZA DUALITĂŢII CUPLURILOR DE FUNCŢII LOGICE

2.1. Semnificaţiile noţiunilor de dual şi de dualitate

Dualitatea reprezintă o proprietate caracteristică anumitor procese, legi, noţiuni, structuri şi a. m. d., care are doi poli opozabili (contradictorii, opuşi, complementari). Drept cupluri cu caracter dual pot servi: plus şi minus, 1 logic şi 0 logic, bine şi rău, activ şi pasiv, lumină şi întuneric, intuiţie (neconştientizată) şi logică (conştientizată), adevăr şi falsitate, logică pozitivă (LP) şi logică negativă (LN) şi a. m. d. Principiul de dualitate stă la baza dezvoltării a tot ce este viu în univers, deoarece acesta este bazat pe „Legea unităţii şi luptei contrariilor". Lumea materială îşi conservă dualitatea, deoarece este construită din elemente de natură polară (duală).

În cazul general, cuvântul *dualitate* face referinţă la noţiunea de doi. În particular, aceasta este utilizată în mai multe materii: în matematică dualitatea este o noţiune care are numeroase semnificaţii – (DEX Francez).

Dual – raportul a două proprietăţi, elemente, obiecte, fiinţe de natură opusă, care, de obicei, alcătuiesc un cuplu, o pereche (– *DEX al limbii române*).

Dualitate: – calitatea, caracterul a ceea ce este dublu sau prezintă o natură dublă; - coexistenţa a două principii sau a două elemente diferite, opuse; - ansamblu format din două elemente diferite, opuse (– *DEX al limbii române*).

În filozofia antică chineză încă de la începuturile gândirii filozofice au apărut elemente strâns legate de Univers şi de viaţă, cele două principii antagoniste-*complementare* – Yin şi Yang, născându-se din noţiunea arhaică de unitate originară. Yin, principiul de natură feminină, analogul întunericului, pământului, lunii, recelui, umedului, completează masculinul, Yang, analogul luminii, cerului, soarelui, căldurii, a uscatului. În gândirea filozofică chineză orice lucru sau fiinţă, cu excepţia pământului (Yin pur) şi a cerului (Yang pur), este alcătuit din Yin şi Yang, în diferite proporţii. De asemenea, se consideră că însăşi ordinea şi echilibrul Universului sunt menţinute de echilibrul dintre aceste două principii antagonist-*complementare*. Alternanța dintre acestea sau interacțiunea lor au ca rezultat, în conceptul filozofiei antice chineze, transformările continue ale Universului şi ale vieții ("*I Ching" – „Cartea schimbărilor”, filosofia chineză antică: I-ul mileniu î. e. n.).*

Dualitatea are şi semnificațiile de duplicitate, ambiguitate – (*DEX Francez*).

Din aceste definiții rezultă că noțiunea de dualitate nu are o definiție strictă, aceasta lăsând loc atât pentru interpretări adecvate, cât şi pentru interpretări mai puțin adecvate. Această remarcă este importantă, deoarece ipoteza dualității constituie punctul de pornire pentru elaborarea diverselor modele duale ale obiectelor şi produselor în multe domenii importante ale ştiinței şi tehnicii.

2.2. Noțiunile de dual şi de dualitate în literatura de specialitate

Elaborarea unor modele adecvate ale cuplurilor de funcții logice duale necesită utilizarea unor noțiuni adecvate. În literatura de specialitate pot fi găsite numeroase definiții ale noțiunilor de dual şi de dualitate sau în strânsă legătură cu acestea. Comentariile, unde este cazul, sunt date cu text *cursiv*, iar lipsa acestora semnifică acordul cu interpretarea dată de autorul respectiv.

[1] (pag. 48-49) – „Distincția dintre FL ŞI şi SAU constă doar în faptul cărei valori fizice reale le corespund 1 şi 0. Reprezentarea în care 1 corespunde valorii fizice mai mari se numeşte logică pozitivă (LP), iar reprezentarea cu corespondență inversă se numeşte logică negativă (LN). În acest sens FL *ŞI* şi *NU-ŞI* din LP se dovedesc a fi FL *SAU* şi *NU-SAU* în LN. Acest fapt este determinat de dualitatea logicii”.

Dacă convenim să notăm

$=$ $\neq$

a 2 funcții logice, atunci, în cazul dat, obținem următoarele expresii logice, care contrazic atât estimarea distincției între FL ŞI şi SAU, cât şi «corespondența» FL ŞI şi NU-ŞI în logica pozitivă şi în logica negativă:

$$(f_1 \cdot f_2) = (\overline{f_1} \vee \overline{f_2})$$
$$(\overline{f_1} \cdot \overline{f_2}) = (f_1 \vee f_2)$$

[1] (pag. 55) – „Datorită identității structurilor cu două nivele ŞI-SAU şi ŞI-NU/ŞI-NU circuitul cu două nivele ŞI-SAU poate fi modificat în circuit ŞI-NU/ŞI-NU. Acesta este un exemplu de utilizare a dualității algebrei booleene (AB), descrisă de expresia $f_1 + f_2 \equiv \overline{\overline{f_1} \cdot \overline{f_2}}$”.

Această expresie reprezintă o identitate şi nu o relație de dualitate între partea stângă şi partea dreaptă a expresiei logice. Relația de dualitate între partea stângă şi partea dreaptă a expresiei logice, descrise mai sus, va fi următoarea:

$$(f_1 \vee f_2) = (\overline{f_1} \cdot \overline{f_2})$$

Expresia logică (6) este identică cu expresia logică (5).

Totuşi, relațiile logice (4), (5), şi (6) se referă la dualitatea FL, care au acelaşi domeniu de definiție a argumentelor logici, acesta ne fiind şi cazul LP si LN. Continuarea dezvoltării acestei idei legate de teoria dualității va fi prezentată mai jos.

[2] (pag. 63). „În circuitele integrate (CI) mai des sunt utilizați termenii de tensiune logică (voltaj) şi termenii de nivele logice. Din LP şi LN proiectantul va alege una singură, în dependență de preferințele beneficiarului sau comodității de proiectare. De exemplu, să considerăm următoarea tabelă de adevăr a unei FL, descrisă în termenii voltajelor respective (tabela 2,a).

Tabela 2. FL în logica pozitivă şi în logica negativă

Utilizând LP (H=1 şi L=0) obținem tabelul 2,b. Acesta reprezintă tabela de adevăr a porții logice ŞI-NU.

Pe de altă parte, utilizarea LN (H=0 şi L=1) conduce la tabela 2,c. Aceasta reprezintă tabela de adevăr a porții logice SAU-NU.

Să notăm, că convertirea porților logice de la LP la cea negativă şi viceversa conduce în mod fundamental la obținerea funcției duale”.

Acesta este un exemplu foarte important pentru înțelegerea noțiunii de dual. Particularitatea exemplului constă în faptul, că o funcție logică este reprezentată în LP, iar cealaltă - în LN. În realitate, însă, circuitele logice şi calculatoarele sunt proiectate şi funcționează într-o singură logică – pozitivă sau negativă. În SUA şi Europa mai frecvent este utilizată logica pozitivă, pe când în Japonia – logica negativă.

A doua particularitate a acestui exemplu extraordinar î-l constituie faptul, că în tabelul 2,c deja a fost efectuată „dualizarea”, adică inversarea argumentelor. Anume aceasta şi conduce la afirmația că

$$(\overline{A \cdot B})_{LP} = (\overline{A \vee B})_{LN}$$

[2] (pag. 63 - 64). „Semnalele logice active (H = 1 în LP şi L= 0 în LN) sunt acelea care realizează funcțiile necesare. Un semnal este considerat afectat, dacă acesta este activ. Un semnal logic este dezafectat atunci când acesta nu este activ”.

Valorile duale active implica dualitatea argumenților.

[2] (pag. 65). – „Notăm, că expresia duală unei funcții booleene se obține prin schimbarea 1 cu 0 şi 0 cu 1, dacă acestea apar în ecuație, şi înlocuirea semnului · al FL ŞI cu semnul $\vee$ al FL SAU şi a semnului $\vee$ al FL SAU cu semnul · al FL ŞI”.

Aceste reguli sunt valabile doar în cazul algebrei booleene (AB), înlocuirile 1 cu 0 şi 0 cu 1 constituind ”dualizarea” argumentelor FL.

[3]. (pag. 99). – „Este imposibil de stabilit, prin observație directă asupra intrărilor şi ieşirilor unei porți logice NAND, dacă structura internă a acesteia cuprinde o poartă AND urmată de un inversor (*AND-NOT*), nişte inversoare urmate de o poartă OR (funcția *NOT-OR*), sau este implementată direct cu CMOS (funcția *NAND*), întrucât toate circuitele NAND realizează exact aceeaşi FL, deşi

simbolul utilizat nu afectează în nici un fel funcția realizată de un circuit”.

Nu este specificat domeniul de valabilitate – algebra logicii (AL) sau doar algebra booleană (AB).

[3]. (pag. 99).- „Metateoremă – o teoremă despre teoreme. *Principiul dualității*: Orice teoremă sau identitate din algebra de comutație își păstrează valabilitatea dacă se înlocuiesc reciproc, peste tot, semnele 0 și 1 și semnele operațiilor $\cdot$ și $\vee$”.

Nu este specificat domeniul de valabilitate – AL sau AB. Metateorema este valabilă doar în algebra booleană.

[3]. (pag. 200 - 201). – „Definiția formală a dualei unei expresii logice. Dacă $F(X_1, X_2,\ldots, X_n, \vee, \cdot, ')$ (simbolul operației de inversare-complementare), atunci duala expresiei F, notată F^D, este aceiași expresie în care s-au înlocuit reciproc operatorii $\vee$, $\cdot$:

$F^D(X_1, X_2, \ldots, X_n, \vee, \cdot, ') = F(X_1, X_2,\ldots, X_n, \cdot, \vee, ')$”

Nu este specificat domeniul de valabilitate – AL sau AB. Identitatea este valabilă doar în algebra booleană.

[3]. (pag. 201 - 202). – „Considerăm o expresie logică oarecare $F(X_1, X_2,\ldots, X_n)$ și, respectând convenția de LP realizăm această funcție folosind inversoare pentru operația de negare, porți de tipul AND și de tipul OR. După aceasta, nu schimbăm nimic în circuitul obținut, însă trecem de la LP la LN, folosind FL duale respective. Atunci circuitul se va schimba în mod corespunzător, dar, în mod surprinzător, pentru toate combinațiile posibile de semnale de intrare (High și Low), circuitul va genera **aceleași tensiuni de ieșire**” *(pentru ambele circuite, elaborate unul în LN, și celălalt, în LN)*. „Dar, din punctul de vedere al algebrei de comutație, valoarea de ieșire – 0 sau 1 – este opusă celei obținute în LP”. ***Observație extraordinar de importantă a autorului*** **cărții.** I*nterpretarea nu poate fi decât una: FL efectuată în LP coincide cu FL efectuată în LN. Totodată, nu trebuie de uitat, că nivelul activ (H) în LP este 1 logic, iar nivelul activ (L) în LN este 0 logic.*

Totuși, porțile nu sunt echivalente, ci duale: dualitatea este asigurată de utilizarea a însăși logicilor duale. Această dualitate este o dualitate imaginară: circuitele digitale integrate și calculatoarele funcționează într-o singură logică – mai frecvent în cea pozitivă.

[4]. (pag. 60) – „FL $f_1(x_1,\ldots,x_n)$ se numește duală funcției $f_2(x_1,\ldots,x_n)$, dacă $f_1(x_1,\ldots,x_n) = \overline{f_2}(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$. Efectuând inversarea ambelor părți ale egalității și înlocuind $(x_1,\ldots,x_n)$ cu $\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n$, obținem $\overline{f}_1(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) = \overline{\overline{f}}_2(\overline{\overline{x}}_1,\ldots,\overline{\overline{x}}_n) = f_2(x_1,\ldots,x_n)$, adică f_2 este duală funcției f_1. Deci, relația de dualitate între funcții este simetrică. Din definiția dualității rezultă, că pentru orice funcție funcția duală se determină în mod univoc”.

[4]. (pag. 60) – *Principiul de dualitate în algebra logicii:* Dacă în formula F, care reprezintă funcția f, toate semnele funcțiilor vor fi schimbate corespunzător cu semne ale funcțiilor duale, atunci formula obținută F* va reprezenta funcția f*, duală funcției f.

[4]. (pag. 60) – *Principiul de dualitate în algebra booleană*: are un caracter mai concret: dacă în formula *F*, care reprezintă funcția *f*, vor fi schimbate toate conjuncțiile cu disjuncții, disjuncțiile – cu conjuncții, 1 cu 0, 0 cu 1, atunci vom obține formula F*, care reprezintă funcția f*, duală funcției f.

Această deosebire a dualității în AL și AB apare datorită faptului, că AB poate realiza o funcție logică utilizând doar operațiile logice ȘI, SAU, NU. Această particularitate conduce la dificultăți de stabilire a relației directe de dualitate între o FL din AB (implicit reprezentată doar în LP) și unele FL din AL.

2. DUALITATEA FL ÎN ALGEBRA BOOLEANĂ ȘI ÎN ALGEBRA LOGICII

Analiza dualității cuplurilor de FL duale a scos în evidență caracterul divers al acestei proprietăți a cuplurilor de FL în dependență de logica de reprezentare a FL - pozitivă sau negativă sau de algebra utilizată în acest scop – AB sau AL. În literatura de specialitate se vorbește despre dualitate în modul general: practic lipsesc studiile legate, de exemplu, de dualitatea în AB, sau în AL, dualitatea a două FL, reprezentate una în LP și, cealaltă, în LN. Acest studiu are scopul să faciliteze înțelegerea mai profundă a dualității și a importanței utilizării acesteia pentru obținerea unor produse cu proprietăți noi. Vom utiliza tabela 3 și tabela 4 pentru reprezentarea FL în LP și, respectiv, în LN și vom încerca să stabilim existența relațiilor ipotetice de dualitate între diverse cupluri de FL (fig.1 și fig. 2). Pentru a facilita comprehensiunea acestui proces tabelele 3 și 4 sunt ipotetic divizate în 2 părți cu o linie verticală între f_7 și f_8, domeniul $f_0 - f_7$ fiind valabil în AB, iar domeniul $f_0 - f_{15}$ – în AL. În cazul general, una din FL ale cuplului dual are la intrări inversoare.

Pentru exemplificare în fig.1 și fig.2 sunt prezentate procesele de obținere a FL duale ȘI, respectiv, SAU.

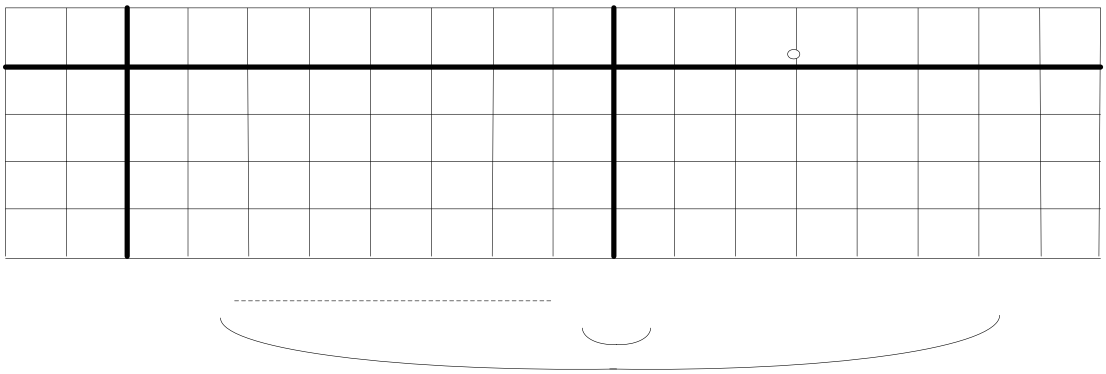
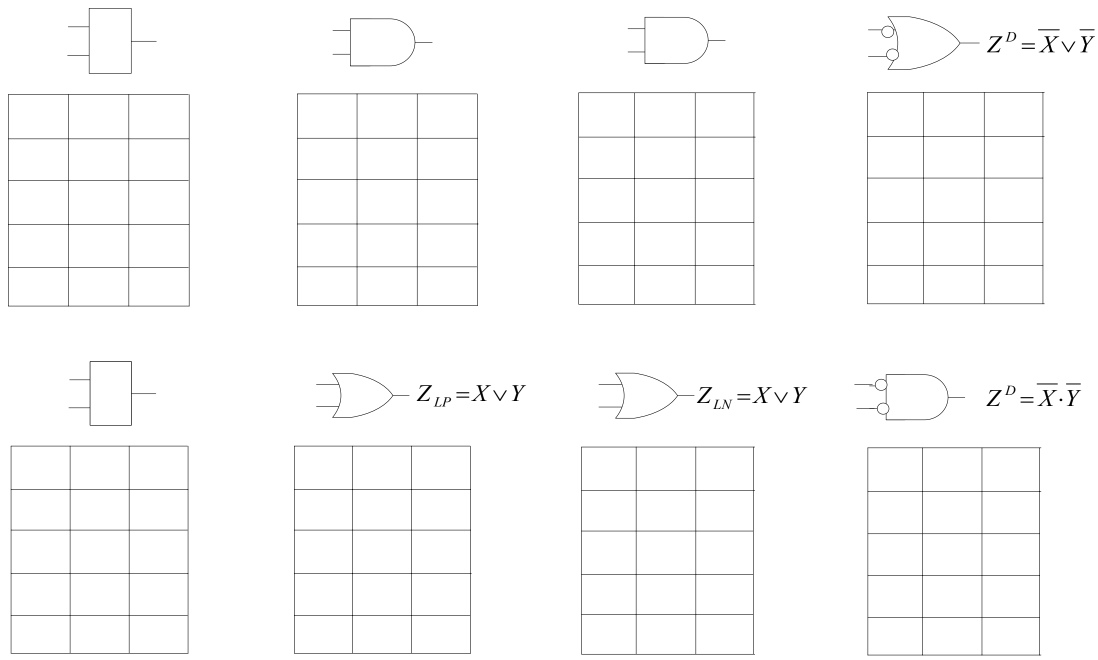


Tabela 4. Reprezentarea funcțiilor logice în logica negativă

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

& V NU-ŞI (SAU-NU) NU-SAU (ŞI-NU)



Fie că pentru FL ŞI din fig. 1 (f_1 din tabela 3), dată în LP, trebuie să stabilim FL duală. Căutăm FL f_1 în tabela 4. Această FL are valorile opuse - f_1(1,1,1,0), dar este reprezentată în LN şi nu poate fi comparată cu FL f_1, dată în LP, fiindcă domeniile de definiție a variabilelor de intrare diferă. Căutăm în tab.3 funcția f_{14}(1,1,1,0) cu acelaşi vector al semnalelor de ieşire. Deci, FL NU-SAU (ŞI-NU) (fig. 1,d) este duală FL f_1 ŞI. Ambele funcții ale cuplului aparțin AL şi au acelaşi domeniu de definiție a variabilelor de intrare. În AB pentru FL ŞI nu există în mod direct FL duală, de aceea FL duală NU-SAU se va obține prin 2 operații distincte: FL f_7 SAU va fi supusă procesului de „dualizare" – variabilele de intrare ale FL vor fi inversate. Deci, FL NOT-OR (1,d) va fi duala FL ŞI în algebra booleană.

Duala FL SAU (fig. 2) în AL va fi calculată prin acelaşi procedeu: găsim FL f_7 în tab. 3, trecem la f_7 în tab.4 şi găsim FL f_8 de tipul NU-ŞI (SAU-NU). În AB FL NOT-AND va fi realizată utilizând două operații logice.

În cazul general, *duala unei FL în AL* se regăseşte în domeniul f_0 – f_{15} al tab.1. De exemplu, pentru a afla duala FL f_1 (ŞI), în tab. 1 găsim FL f_{14} (NU-SAU), adică echivalenta acesteia ŞI-NU, evident duală FL f_1 ŞI.

Duala *unei FL în AB* nu se regăseşte în mod direct în domeniul f_0–f_7, de aceea pentru a o afla, găsim FL f_{14} (NU-SAU), care este duala în AL. Funcția căutată în AB va fi SAU (f_7), „dualizarea" căreia necesită efectuarea inversării variabilelor de intrare ale acestora.

Rezultatele obținute permit crearea unor cupluri de porți cu proprietăți moştenite de la ambele porți, cea ce conduce la un nou concept de proiectare pentru testabilitate.

4. REFERINȚE

[1]. K. Kinosita, K. Asada, O. Karatsu. Logical design of VLSI. – Loghiceskoe proiectirovanie SBIS – Iwanami Shoten Publishers, Tokyo, 1985, 304 pag. Trad. în limba rusă, 1988.

[2]. M. Rafiquzzaman. Fundamentals of Digital Logic and Microcomputer Design. Fifth Edition, California, WILEY INTERSCIENCE – John Wiley&Sons inc., 2005, 840 pag

[3].Wakerly J. F. Circuite digitale. Principiile şi practicile folosite în proiectare, Bucureşti: Teora, – 2002. – 928 p.

[4]. Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980 г. – 344 с.

X Y Z