

ANALIZA CINEMATICĂ A MECANISMULUI BIELĂ-MANIVELĂ. METODE CLASICE ȘI MODERNE DE CALCUL (CALCUL NUMERIC ÎN LIMBAJUL DE PROGRAMARE PYTHON)

Ion NEGRU

Departamentul Transporturi, grupa ITA-221, Facultatea Inginerie Mecanică Industrială și Transporturi,
Universitatea Tehnică a Moldovei, Chișinău, Republica Moldova

Autorul corespondent: Negru Ion, e-mail ion.negru@tran.utm.md

Îndrumător/coordonator științific: **Iulian MALCOCI**, conf. univ., Universitatea Tehnică a Moldovei

Rezumat. *Importanța analizei cinematice în cazul mecanismelor plane este benefică în primul rând pentru determinarea stării de mișcare a tuturor elementelor mecanismului studiat sau a punctelor de interes care aparțin elementelor mecanismului fără a se lua în considerare forțele care provoacă mișcarea. De obicei aplicăm analiza cinematică la mecanisme ale căror dimensiuni sunt cunoscute, și reprezentate la un coeficient de scară conform standardului SR EN ISO 5455:1997. Astfel prin intermediul analizei cinematice se pot determina parametrii cinematici precum poziția elementului sau a punctului studiat, traiectoria descrisă de punctul studiat, vitezele și accelerațiile liniare și respectiv unghiulare. În lucrare a fost folosită schema mecanismului bielă-manivelă pentru determinarea distribuției vitezelor (teoretic) prind diferite metode clasice precum metoda centrului instantaneu de rotație, metoda rabaterii, metoda proiecțiilor și metoda poligoanelor de viteză. În final a fost efectuat și un calcul numeric pentru un ciclu complet de funcționare a mecanismului în limbajul de programare Python.*

Cuvinte cheie: *analiza cinematică a mecanismelor, mecanism bielă-manivelă, metode de calcul, limbaj de programare Python*

Introducere

În lucrare au fost trecute în revistă principalele metode de analiză cinematică a mecanismului bielă manivelă. În prima parte a lucrării au fost arătate la nivel teoretic următoarele metode clasice:

- calculul distribuției vitezelor prin *metoda centrului instantaneu de rotație*, această metodă a fost folosită cu preponderență în timpul rezolvării problemelor la disciplina *Mecanica Teoretică* [1];
- calculul distribuției vitezelor prin *metoda rabaterii* și *metoda proiecțiilor*, metode care derivă din *metoda centrului instantaneu de rotație*;
- calculul distribuției vitezelor prin *metoda construirii poligoanelor de viteză*, metodă care a fost folosită la realizarea proiectului de an la disciplina *Mecanisme* [2].

În partea a doua a lucrării a fost prezentat o metodă modernă și anume un exemplu numeric de calcul pentru determinarea distribuțiilor vitezelor și accelerațiilor, calcul realizat prin intermediul limbajului de programe Python, care pe lângă calculul numeric propriu zis ne permite și vizualizarea rezultatelor obținute în timp real nu doar pentru o poziție oarecare, ca în cazul metodelor clasice, dar ne permite să determinăm și vizualizăm parametrii cinematici studiați pentru un ciclu cinematic complet în timpul funcționării mecanismului [3].

Limbajul de programare Python a fost ales pentru a realiza calculul numeric și vizualizarea calculului deoarece în anul I de studii am urmat cursul *Bazele Programării Calculatoarelor* în care am studiat bazele programării în limbajul Python. Pe de altă parte acest limbaj de programare este tot mai folosit la scară mondială din cauza avantajelor pe care le prezintă față de alți concurenți, și anume [3]:

- Python are un cod simplu și flexibil astfel încât este ușor de înțeles și citit, chiar și pentru începători;
- Python poate fi folosit gratis (open source) și este multifuncțional (crearea de aplicații web, calcule numerice, calcule ingineresti, crearea aplicațiilor grafice) datorită numărului mare de pachete, module și biblioteci, care la rândul său sun disponibile gratuit;
- Python poate fi folosit pe toate platformele și sistemele de operare (Windows, macOS și Linux).

Există diferite clasamente în ceea ce privește care limbaj de programare este cel mai popular și utilizat la nivel global. În majoritatea acestor clasamente în top se află Python, astfel în fig. 1 este prezentat clasamentul oferit de compania IEEE Spectrum pentru anul 2023 [4].



Figura 1. Exemplu clasament limbaje de programare pentru 2023

1. Analiza cinematică. Metode clasice de calcul.

a) *Metoda centrului instantaneu de rotație.* Este o metodă grafo-analitică ce se bazează pe faptul că la un moment dat distribuția de viteze este aceeași cu cea dintr-o mișcare de rotație în jurul centrului instantaneu de rotație cu viteza unghiulară ω . Această metodă a fost folosită cu preponderență la rezolvarea problemelor în cadrul disciplinei *Mecanica Teoretică*.

Vom considera mecanismul bielă-manivelă din fig. 2 pentru care vom determina vitezele punctelor A și B prin metoda centrului instantaneu de rotație.

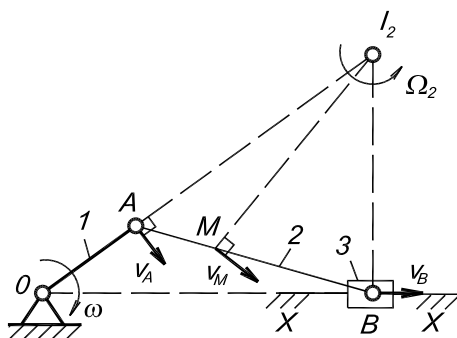


Figura 2. Metoda centrului instantaneu de rotație

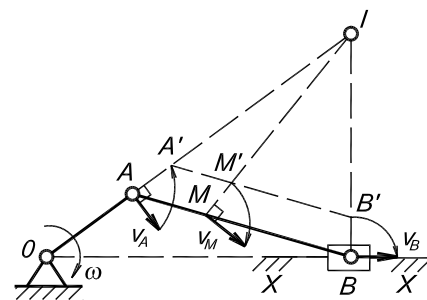


Figura 3. Metoda rabaterii

Soluția teoretică: Manivela 1 efectuează mișcare de rotație, biela 2 mișcare plan-paralelă, iar patina 3 mișcare de translație. Punctul A , aparține simultan manivelei și bielei, are viteza

complet determinată $v_A = OA \cdot \omega$, care este perpendiculară pe OA și sensul de rotație dat de viteza unghiulară ω .

Punctul B aparține simultan și bielei și patinei are viteza paralelă ghidajului xx . Prin urmare pentru bielă sunt îndeplinite condițiile pentru aplicarea metodei centrului instantaneu de rotație. Ridicând perpendiculare în A și B pe suporturile vitezelor acestor puncte, se obține centrul instantaneu de rotație I_2 . Viteza unghiulară în jurul său este $\Omega_2 = \frac{v_A}{I_2A} = \frac{OA}{I_2A} \omega$, unde $v_B = I_2B \cdot \Omega_2 = \frac{I_2B}{I_2A} \cdot OA \cdot \omega$. Viteza unui punct arbitrar M de pe bielă se obține ca într-o mișcare de rotație în jurul lui I_2 cu viteza unghiulară Ω_2 .

b) *Metoda rabaterii*. Această metodă este prezentată în figura 3.

Soluția teoretică: Viteza punctului A este perpendiculară pe OA și are modulul $v_A = OA \cdot \omega$; iar punctul B are viteza paralelă ghidajului xx . Se rabate cu $\frac{\pi}{2}$ viteza \bar{v}_A și se obține punctul A' . Din A' se duce o paralelă la AB , care intersectează în punctul B' perpendiculara ridicată în B pe xx . Segmentul BB' se rabate cu $\frac{\pi}{2}$ în sens opus cu \bar{v}_A și se obține la scară viteza \bar{v}_B . Pentru determinarea vitezei unui punct M de pe bielă, se construiește centrul instantaneu de rotație I , se unește M cu I și se obține punctul M' la intersecția cu AB' . Segmentul MM' se rabate cu $\frac{\pi}{2}$ în același sens cu BB' și se obține viteza \bar{v}_M la scară.

c) *Metoda proiecțiilor*. Această metodă este prezentată în figura 4.

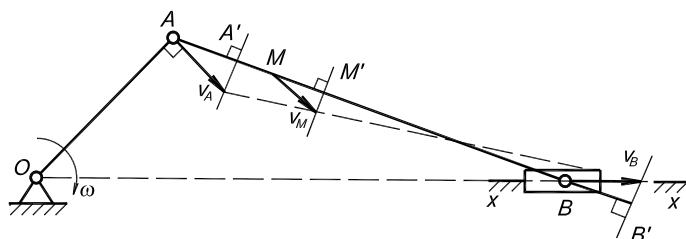


Figura 4. Metoda proiecțiilor

Soluția teoretică: Viteza punctului A are modulul $|\bar{v}_A| = OA \cdot \omega$, este perpendiculară pe O_1A , iar sensul este dat de ω . Viteza punctului B are suportul perpendicular pe O_2B . Se construiesc proiecțiile $AA'=BB'$, iar viteza \bar{v}_B se obține ridicând în punctul B' o perpendiculară pe AB până intersectează perpendiculara pe O_2B .

d) *Metoda poligoanelor de viteză*. Această metodă este de asemenea o metodă grafo-analitică prezentată în figura 5 și a fost folosită cu preponderență în cadrul disciplinei *Mecanisme* pentru determinarea distribuției vitezelor la proiectul de an.

Soluția teoretică: Viteza punctului A are modulul $|\bar{v}_A| = OA \cdot \omega$, este perpendiculară pe OA , iar sensul este dat de ω . Pentru determinarea vitezei punctului B vom scrie ecuația vectorială a lui Euler în mișcare plan-paralelă, când considerăm că punctul B se mișcă în raport cu punctul A . Viteza \bar{v}_B are suportul paralel cu ghidajul xx . Viteza \bar{v}_{BA} are suportul perpendicular pe AB . Deci se poate scrie ecuația vectorială $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$, care se reprezintă în planul vitezelor.

Construind vectorul $\overline{pa} = \overline{v_A}$, se duce prin a , extremitatea lui $\overline{v_A}$, o perpendiculară pe AB (suportului lui $\overline{v_{BA}}$); iar prin p , originea lui $\overline{v_A}$ o paralelă la xx , obținându-se astfel punctul b , extremitatea lui $\overline{v_B}$. În planul vitezelor ecuația vectorială se scrie $\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab}$.

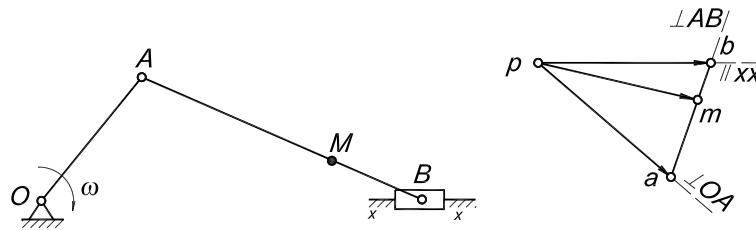


Figura 5. Metoda poligoanelor de viteză

Viteza punctului M se determină aplicând teorema asemănării. Punctul m se găsește pe ab – omologul lui AB – astfel că $\frac{am}{ab} = \frac{AM}{AB}$. În planul vitezelor, viteza punctului M este $\overline{v_M} = \overline{pm}$.

Viteza unghiulară ω_2 se determină cu ajutorul relației $\overline{v_{BA}} = \omega_2 \times \overline{AB}$, de unde $\omega_2 = \frac{|\overline{v_{BA}}|}{|\overline{AB}|}$, iar sensul său este anti orar stabilit cu de vectorul \overline{ab} .

2. Analiza cinematică. Metoda modernă. Calculul numeric în Python

Și în acest caz vom folosi schema aceluiași mecanism bielă-manivelă după cum este prezentat în figura 6, unde r reprezintă lungimea bielei OA , l reprezintă lungimea bielei AB , h reprezintă distanța AC și respectiv d_1 este OC , iar d_2 este CB . Pentru a putea scrie codul în limbajul de programare Python vom avea nevoie de relațiile analitice de calcul. Astfel o primă relație de calcul pentru deplasarea pistonului pe axa orizontală ar fi:

$$x = d_1 + d_2 = r \cdot \cos \theta + \sqrt{(l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \theta)}. \quad (1)$$

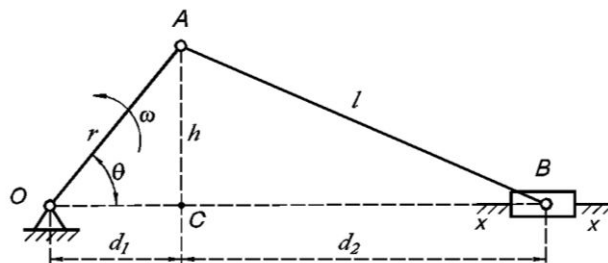


Figura 6. Schema mecanismului bielă-manivelă pentru calculul numeric

Programul de calcul numeric (codul în Python) îl vom scrie pentru determinarea deplasării, vitezei și accelerației pistonului (punctul B) pentru un ciclu cinematic complet atunci când unghiul θ se modifică la o rotație completă a manivelei OA . Cunoscând relația de calcul (1) deplasarea pistonului (punctul B), putem relativ destul de simplu să determinăm atât viteza punctului B (derivata de ordinul 1, $v = \dot{x}$), cât și accelerația punctului B (derivata de ordinul 2, $a = \ddot{x}$). Prin urmare putem obține relațiile analitice de calcul pentru calculul vitezei și accelerației pentru punctul B :

$$v = \dot{x} = -r \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta - \frac{r^2}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2)$$

$$a = \ddot{x} = -r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta - \frac{4 \cdot r^2 \cdot \dot{\theta}^2 \cos 2\theta (l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \theta) + (r^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \sin 2\theta)^2}{4\sqrt{(l^2 - r^2 \cdot \sin^2 \theta)^3}} \quad (3)$$

Pe lângă limbajul de programare Python vom folosi și bibliotecile Numpy pentru calculul numeric, biblioteca Scipy pentru calculul derivatelor de ordinul unu și doi, dar și biblioteca Matplotlib pentru vizualizarea rezultatelor după rularea codului. Pentru a putea efectua calculul numeric propriu zis vom stabili următoarele date: $r = 150 \text{ mm}$ lungimea manivelei OA , $l = 350 \text{ mm}$ lungimea bielei AB , iar turația manivelei OA o vom considera $n = 500 \text{ min}^{-1}$.

Codul Python pentru determinarea deplasării, vitezei și accelerației punctului B pentru o rotație completă a manivelei:

```
1 import numpy as np
2 from numpy import pi, sin, cos
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from scipy.misc import derivative
5
6 r = 150 # lungime manivela OA
7 l = 350 # lungime biela AB
8 rpm = 500 # turatia manivelei
9 omega = (2*pi*rpm)/60 # rad/sec
10
11 def deplasare_B(t):
12     d1 = r*cos(omega*t)
13     d2 = np.sqrt(l**2-(r**2*sin(omega*t)*sin(omega*t)))
14     return d1+d2
15
16 def viteza(t):
17     return derivative(deplasare_B,t)
18
19 def acceleratia(t):
20     return derivative(viteza,t)
21 timp = np.linspace(0, .5, 350)
22 unghi = omega*timp*180/pi
23 x = deplasare_B(timp)
24 v = viteza(timp)
25 a = acceleratia(timp)
26 plt.figure(figsize=(9,6))
27 plt.subplot(3,1,1) # graficul deplasarii
28 plt.plot(unghi, x, 'b')
29 plt.ylabel('Deplasare mm')
30 plt.tight_layout(pad=3.0)
31 plt.xlim(0,360) # 1 rotatie completa
32 plt.subplot(3,1,2) # graficul vitezei
33 plt.plot(unghi, v, 'orange')
34 plt.ylabel('Viteza mm/s')
35 plt.tight_layout(pad=3.0)
36 plt.xlim(0,360) # 1 rotatie completa
37 plt.subplot(3,1,3) # graficul acceleratiei
38 plt.plot(unghi, a, 'r')
39 plt.ylabel('Acceleratia mm/s^2')
40 plt.xlabel('Unghiul in grade')
41 plt.tight_layout(pad=3.0)
42 plt.xlim(0,360) # 1 rotatie completa
43 plt.show()
```

După rularea codului von obține reprezentările grafice figura 7 pentru deplasarea, viteza și accelerația punctului B pentru o rotație completă a manivelei.

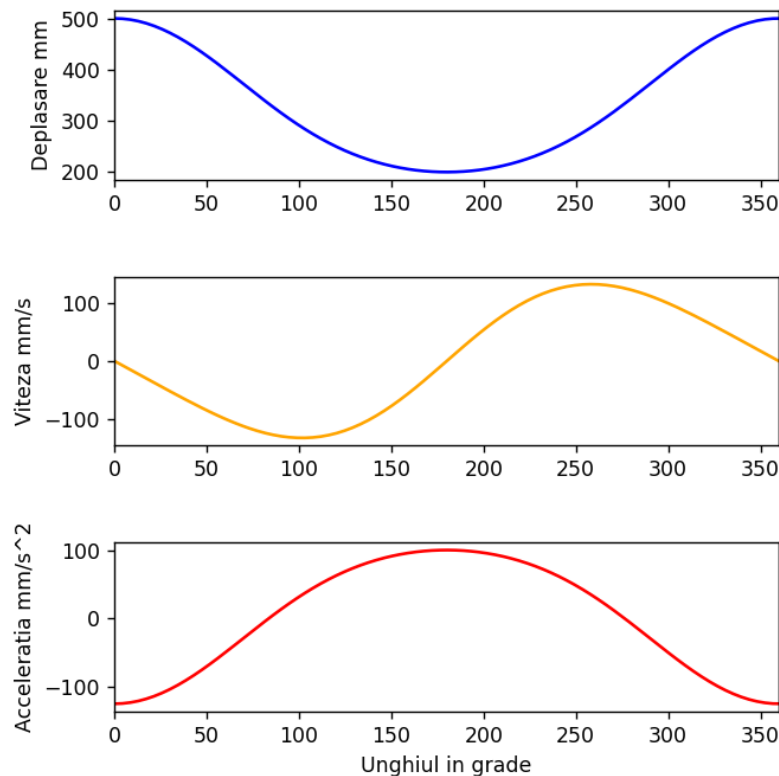


Figura 7. Rezultatul obținut după rularea codului

Concluzii

În lucrare a fost realizată o analiză a metodelor clasice și moderne de analiză cinematică pentru mecanismul bielă-manivelă. Dacă metodele clasice ne oferă posibilitatea să calculăm deplasarea, viteza sau accelerația pentru o poziție a mecanismului cu ajutorul metodei moderne de calcul numeric în limbajul Python putem obține rezultatul foarte rapid pentru mai mulți parametri concomitent pentru întreg ciclul cinematic (în cazul cercetat pentru o rotație completă a manivelei). Pentru cercetările ulterioare ne propunem să realizăm astfel de calcule și pentru alte tipuri de mecanisme.

Referințe

- [1] RĂDOÎ, M., DECIU, E. Mecanica, București: Ed. Didactică și Pedagogică, 1993, pp. 212-239.
- [2] MACARIȘIN, S., SOCHIREANU, A., MALCOCI, Iu. Teoria mecanismelor și mașinilor. Îndrumar de proiectare, Chișinău: Ed. UTM, 2009, pp. 36-71.
- [3] MALCOCI, Iu., CIONANU, O., CIOBANU, R. Coding in Python for mathematics, science and engineering. In: *ACTA TECHNICA NAPOCENSIS*, Series: Applied Mathematics, Mechanics and Engineering, 2022, 65, Issue Special (IV), pp. 1215-1220. <https://atna-mam.utcluj.ro/index.php/Acta/article/view/2050/1630>
- [4] Spectrum Top Programming Languages for 2023. [online]. [accesat 26.01.2024]. Disponibil: <https://spectrum.ieee.org/the-top-programming-languages-2023>