

EVOLUȚIA UNOR INSTRUMENTE ȘI DISPOZITIVE GEOMETRICE UTILIZATE ÎN MATEMATICĂ, ARHITECTURĂ ȘI CONSTRUCȚII (VI) - CURBA OVOID-

*Cantemir LORIN, Constantin ANTONOVICI, Andrei ȘTEFAN
membru ASTR, Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iași
prof. gr. I, Piatra-Neamț
prof. gr. I, Buhuși, jud. Bacău*

În unele dicționare, precum [1], [2], [3], noțiunea de ovoid nici nu este amintită, iar în altele, (exemplu [4]), noțiunea este tratată inexplicit, oferind posibilitatea unor confuzii, ca în definiția următoare: ovoid = în formă de ou, oval, ovoidal, oviform (lat. ovum –ou, gr. eidos – formă). Dar, se știe că ovoidul este un corp, având o [suprafață de revoluție](#) cu o singură axă de [simetrie](#), în timp ce ovalul este o suprafață plană cu două dimensiuni.

Noi am încercat să precizăm noțiunea respectivă. Curba - ovoid este o figură plană, închisă, formată din patru arce circulare (câte două egale) racordate între ele, simetrică numai față de o axă. Denumirea ei provine de la asemănarea cu forma unui ou, iar prima utilizare cunoscută este în 1776.

Comunicarea respectivă este formată din șase părți:

- I) Elemente teoretice și construcții cu rigla și compasul;
- II) Obținerea curbei - ovoid prin transformările unor curbe clasice;
- III) Curba - ovoid ca loc geometric;
- IV) Relații funcționale care se reprezintă grafic prin curbe - ovoid;
- V) Aplicații practice;
- VI) Bibliografie.

I) Pentru construcția curbei sunt necesare câteva elemente de racordare a două cercuri prin arce de cerc, detaliate în [6].

§ 1. Construcția curbei – ovoid

Reprezentarea grafică se realizează cu ajutorul a patru arce de cerc în următoarele situații:

1. Se cunoaște axa mică.

Se dă: axa mică AB; **se cere:** curba - ovoid cu această axă:

(1) Pe o dreaptă considerăm segmentul AB; (2) Mediatoarea m prin mijlocul O_1 , va conține axa mare a curbei; (3) Cu vârful compasului în O_1 se trasează cercul de rază $R = AB/2$; (4) Fie O_2 punctul de intersecție al cercului cu axa mare; (5) Se construiesc apoi semidreptele $[AO_2$ și $[BO_2$, (6) Cu vârful compasului în A, respectiv în B, se trasează două arce de cerc de rază $AB = 2R$

începând de la B, respectiv A, până la intersecțiile F cu $[AO_2]$ și E cu $[BO_2]$; (7) Construcția se termină prin trasarea arcului de cerc cu centrul în O_2 și raza $r = O_2E$ (fig. 1).

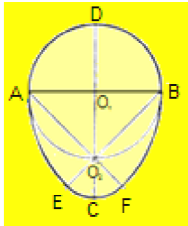


Fig. 1.

Nota: 1. Din figura 1 se poate obține ecuația curbei - ovoid: Notăm $O_1A = R$ și remarcând că $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{BAF}) = \pi/4$, obținem: ecuația cercului cu centrul în O_1 și raza $OB = OA = R$: $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in [0, \pi]$; ecuația cercului cu centrul B raza $BA = BE = 2R$: $x = 1 + 2R \cos t$, $y = 2R \sin t$, $t \in (\pi, 5\pi/4]$; Ecuația cercului cu centrul în A și raza $AB = AF = 2R$: $x = -1 + 2R \cos t$, $y = 2R \sin t$, $t \in (7\pi/4, 2\pi]$;

Deoarece $AO_2 = BO_2 = R\sqrt{2}$, deci $O_2E = O_2F = r = 2R - R\sqrt{2}$, ecuația cercului cu centrul în O_2 și raza $O_2E = O_2F$ devine: $x = (2R - R\sqrt{2}) \cos t$, $y = -1 + (2R - R\sqrt{2}) \sin t$, $t \in (5\pi/4, 7\pi/4]$.

Deci, ecuațiile parametrice ale curbei - ovoid pentru $t \in [0, 2\pi]$ sunt:

$x(t) = R \cos t$, $t \in [0, \pi] + (1 + 2R \cos t)$, $t \in (\pi, 5\pi/4] + (2 - \sqrt{2})R \cos t$, $t \in (5\pi/4, 7\pi/4] + (-1 + 2R \cos t)$, $t \in (7\pi/4, 2\pi]$ și $y(t) = R \sin t$, $t \in [0, \pi] + 2R \sin t$, $t \in (\pi, 5\pi/4] + (-1 + (2R - R\sqrt{2}) \sin t)$, $t \in (5\pi/4, 7\pi/4] + 2R \sin t$, $t \in (7\pi/4, 2\pi]$.

2. Tot din această figură putem calcula raportul dintre axe. Notând axa mică $AB = 2a$, $AO_1 = a$, $AO_2 = a\sqrt{2}$. Deci $O_2F = O_2C = 2a - a\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})a$. Prin urmare, $CD = 2a + (2 - \sqrt{2})a = (4 - \sqrt{2})a$, raportul AB / CD fiind $2 / (4 - \sqrt{2}) = (4 + \sqrt{2}) / 7 \cong 0,773$

3. Putem, de asemenea, calcula aria limitată de această curbă, precum și lungimea ei. În afară de utilizarea calculului integral, aceste elemente se pot calcula și prin metode elementare, chiar cu cunoștințe de gimnaziu. Astfel, aria este suma ariilor semidiscului cu raza AO_1 cu a sfertului de disc cu raza AB și a sfertului de disc cu raza EO_2 . Se ajunge la rezultatul $A = (3 - \sqrt{2}) \pi R^2$.

Pentru lungimea curbei se adună lungimile arcelor de cerc care limitează discurile anterioare. Obținem $L = [(6 - \sqrt{2}) / 2] \pi R$

2 Se cunoaște axa mare (prima metodă)

Se dă: axa mare CD; **se cere:** curba- ovoid cu această axă

(1) Trasăm două cercuri cu centrele pe CD de raze R_1 și R_2 care să treacă prin C, respectiv D; (2) Considerăm un punct T pe unul din ele; (3) Le racordăm apoi prin două arce simetrice tangente interior prin T și simetricul său U față de CD (fig. 2).

Nota: 1. Detalii despre racordare în [6];

2. În cazul când $R_1 = R_2$ se obține un oval.

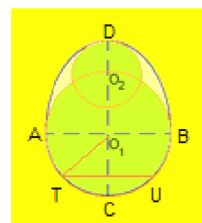


Fig. 2.

3. Se cunoaște axa mare (metoda a doua)

Se dă: axa mare CD; **se cere:** curba- ovoid cu această axă;

(1) Axa mare CD se împarte în șase părți egale $CE = EF = \dots = ID$; (2) Cercul cu centrul în H și raza HD intersectează dreapta perpendiculară în H pe CD în punctele A și B (AB este axa mică); (3) Cercul cu centrul în H și raza HC intersectează dreapta

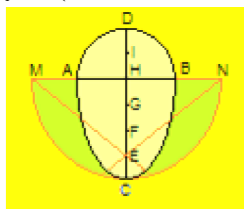


Fig. 3.

AB în M și N; (4) Arcul de cerc cu centrul în N și raza AN taie dreapta ME în P (punct de racordare); (5) Analog, arcul de cerc cu centrul în M și raza BM taie dreapta NE în Q (punct de racordare); (6) Curba se închide cu arcul de cerc cu centrul în E și raza $EP = EQ = EC$ (fig. 3).

Nota: Metoda e aplicată la realizarea tuburilor pentru canalizare și drenaj. Mai multe amănunte în V.

4. Se cunosc ambele axe (metoda întâi)

Se dau: axa mică AB și cea mare CD; **se cere** curba - ovoid.

(1) Trasăm cercul cu diametrul AB care trece prin C și are centrul în O_1 ; (2) Trasăm apoi cercul cu centrul O_2 pe CD, care trece prin D și are raza $O_2D < O_1C$; (3) Racordăm apoi cele două cercuri prin două arce de cerc tangente interior prin A, respectiv B (fig. 4).

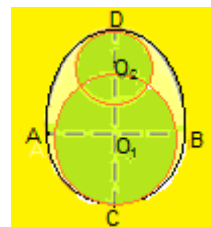


Fig. 4.

Nota: Detalii despre racordare în [5] și [6].

5. Se cunosc ambele axe (metoda a doua)

Se dau: axa mică AB și cea mare CE; **se cere:** curba-ovoid

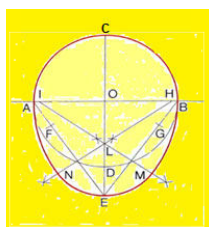


Fig. 5.

(1) Pe o dreaptă se fixează AB, axa minoră a ovoidului; (2) Se trasează mediatoarea lui AB și notăm cu C și D intersecțiile ei cu cercul de diametrul AB; (3) Extindem diametrul CD până la dimensiunea dorită a axei principale CE; (4) Pe segmentele AE și BE pornind de la A și B, se raportează cu compasul AF și BG egale cu DE; (5) Desenăm mediatoarea segmentului FE (fig. 5) și o prelungim până la punctul H (centru de racordare) aflat pe AB; (6) Repetăm operația cu segmentul GE, identificând punctul I (centru de racordare) de pe AB; (7) Cele două mediatoare se vor întâlni în punctul L (centru de racordare); (8) Cu vârful compasului în I și raza IB, se descrie arcul BM; (9) Analog, cu centrul în H și raza HA se descrie arcul AN; (10) În final, arcul cu centrul în L și raza LE, încheie curba - ovoid.

6. Se cunosc razele cercurilor și distanța dintre centrele lor

Se dau: R, r și a ; **se cere:** curba - ovoid respectivă.

Pentru ca această construcție să fie posibilă trebuie ca $R > r$ și $a > R - r$.

(1) Se trasează cercurile $C(R, O)$ și $C_1(r, O_1)$; (2) Perpendiculara în O pe linia OO_1 taie cercul $C(R, O)$ în A și B ; (3) Pe (OA) considerăm punctul O_2 astfel încât $O_2A = r$; (4) Mediatoarea segmentului O_1O_2 intersectează dreapta AO în O_3 , care este

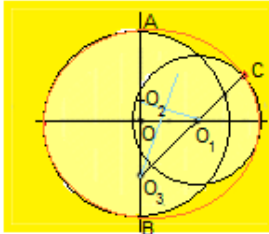


Fig. 6.

centru de racordare; (5) Arcul de cerc trasat cu vârful compasului în O_3 și raza O_3A intersectează cercul C_1 în punctul de racordare C ; (6) Construcția se încheie reluând etapele (3), (4) și (5) în punctul B (fig.6).

Nota: Dacă raportăm figura la un sistem ortogonal de axe ($Ox =$ linia centrelor și $A \in Oy$), atunci centrul de racordare O_3 are coordonatele: $x = 0$ și $y = [(R-r)^2 - a^2] / 2(R-r)$, iar raza sa, $O_3A = O_3C = [a^2 + R^2 - r^2] / 2(R-r)$.

Punctele de racordare au coordonatele $x_A = 0, y_A = R$, iar $x_C = [a(a^2 + R^2 - r^2)] / [a^2 + (R - r)^2], y_C = r[a^2 - (R - r)^2] / [a^2 + (R - r)^2]$.

Ordonatele punctelor B și D sunt opusele celor lui A și C (fig. 6).

II. Curbele - ovoid obținute prin modificarea ecuațiilor unor curbe cunoscute.

Ilustrăm aceasta prin trei cazuri:

1) De la ecuația cercului $x^2 + y^2 = 1$, formăm ecuația $x^2 + t(x)y^2 = 1$ și înlocuind pe $t(x)$ cu diferite funcții vom avea diverse curbe - ovoid.

Două exemple:

a) în figura 7 a: În roșu: cerc pentru $t(x) = 1$; în albastru: ovoid pentru $t(x) = \exp(x \ln 2)$ și în verde: ovoid pentru $t(x) = \exp(x \ln 3)$;

b) Potrivit lui Jurgen Koller, Don M.

Jacobs, SUA a obținut o frumoasă curbă ovoid prin înlocuirea în ecuația cercului $x^2 + y^2 = 1$ cu $t(x) = 1,4^{x^2} \cdot 1,6y^2$ rezultând relația exponențială $x^2 + (1,4^{x^2} \cdot 1,6y^2)^2 = 1$ a cărei grafic este redat fig. 7 b.

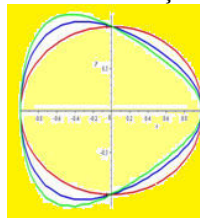


Fig. 7. a

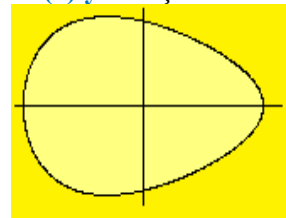
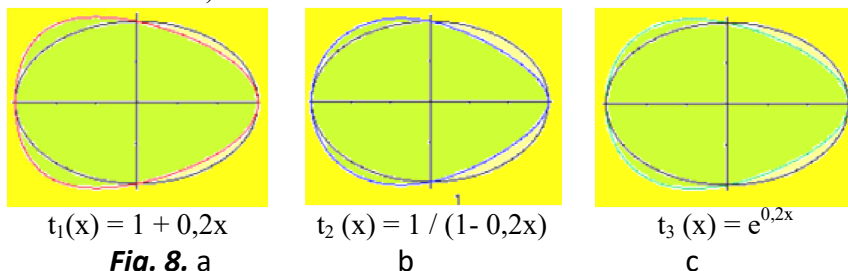


Fig. 7. b

2) Un alt exemplu îl constituie modificarea ecuației unei elipse prin înlocuirea numitorului termenului y^2 cu o funcție adecvată $t(x)$, astfel încât imaginea să devină mai mare pe partea stângă a axei ordonate și mai mică pe partea dreaptă. Astfel, începând cu ecuația elipsei (1) $x^2 / 9 + y^2 / 4 = 1$, prin înmulțirea numitorului lui y^2 cu $t(x)$ se obține: (2) $x^2 / 9 + y^2 / 4t(x) = 1$. Cele trei exemple de mai jos prezintă trei astfel de funcții pentru $t(x)$ care oferă curbe - ovoid, elipsa inițială fiind reprezentată grafic cu culoarea neagră.

În figura 8 a, $t_1(x) = 1 + 0,2x$ se obține curba ovoid roșie care se află în interiorul elipsei din partea dreaptă a axei y -lor, deoarece numitorul lui y^2 este mai mare ca 4, deci curbele aparțin unor elipse cu axe minore mai mici. Analog se poate

preciza de ce curba roșie din stânga axei y-lor se află în exteriorul elipsei negre (numitorul e mai decât 4).



În figurile 8 b și c, curbele - ovoid albastră și verde obținute pentru $t_2(x) = 1 / (1 - 0,2x)$, respectiv $t_3(x) = e^{0,2x}$, au aproximativ aceeași formă, deși, la prima vedere, ecuațiile sunt diferite. Dar, funcția $t_2(x) = 1 / (1 - 0,2x)$ poate fi scrisă ca seria geometrică după formula $1 / (1 - q) = 1 + q + q^2 + \dots$, care aici devine: $t_2(x) = 1 + 0,2x + 0,04x^2 + \dots$, iar funcția $t_3(x) = e^{0,2x}$ dezvoltată ca seria lui Taylor $f(x) = f(a) + [f'(a) / 1!](x-a) + [f''(a) / 2!](x-a)^2 + \dots$ pentru $a = 0$, este $t_3(x) = 1 + 0,2x + 0,002x^2 + \dots$

Comparând cele trei funcții de mai sus, observăm că există inegalitățile: $t_1(x) < t_3(x) < t_2(x)$, ceea ce, grafic, înseamnă că ovoida roșie este în afară, cea verde în mijloc, iar cea albastră în interior.

3) Dacă substituim expresia $t_4(x) = (1 - kx) / (1 + kx)$ în ecuația $x^2 / 9 + y^2 / 4 t_4(x) = 1$, obținem figura 8 d:

- a) pentru $k = 0,1$ curba neagră;
- b) pentru $k = 0,2$ curba roșie;
- c) pentru $k = 0,3$ curba verde;
- d) pentru $k = 1/3$ curba albastră (triunghi), adică în funcție de valorile lui k , curba ovoid neagră devine triunghiul albastru

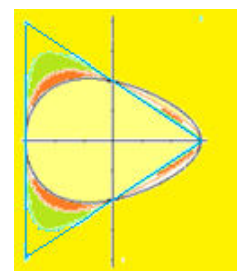


Fig. 8. d

Justificare pentru d) În cazul $k = 1/3$, $t(x) = (3 - x) / (3 + x)$, care înlocuită în ecuația (2) obținem: $x^2/9 + [y^2(3+x)] / [4(3-x)] = 1$ sau $4(x^2-9)(3-x) + 9y^2(3+x) = 0$, expresie echivalentă cu $(x+3)[-4(3-x)^2 + 9y^2] = 0$, de unde rezultă cele trei ecuații: $x+3 = 0$, $2x-3y-6 = 0$ și $2x+3y-6 = 0$, ale căror grafice sunt trasate în figura 8 c cu culoare albastră.

Generalizare Considerând elipsa (1) $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ și $k = 1 / a$, obținem $t_4(x) = (a-x) / (a+x)$, care înlocuită în (2) ne dă: $x^2/a^2 + [y^2(a+x)] / [b^2(a-x)] = 1$, sau $b^2(x^2-a^2)(a-x) + a^2y^28a+x = 0$, echivalentă cu $(x+a)[-b^2(x-a)^2 + a^2y^2] = 0$. Aceasta descompusă în factori de gradul întâi $(x+a)[-b(x-a) + ay][b(x-a) + ay] = 0$, ne dă ecuațiile celor trei drepte: $x+a = 0$; $bx - ay - ab = 0$ și $bx + ay - ab = 0$, care pentru $a = 3$ și $b = 2$ sunt reprezentate în figura 8 d.

În [6] am prezentat construcția elipsei în coordonate polare. Metoda constă în intersectarea a două cercuri concentrice în O cu o semidreaptă mobilă [Ot, care taie cercul mic în D₁, iar pe cel mare în E₁. Paralelele la axele de coordonate prin aceste puncte se intersectează în M₁. Se cerea locul geometric al punctului M₁ când semidreapta [Ot se rotește. Construcția este menționată de matematicianul și

astronomul francez Philippe de Lahire în 1685.

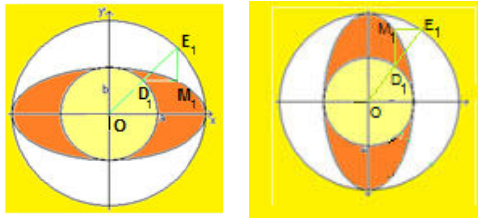


Fig. 9. a

b

Revenim asupra acestei construcții cu unele precizări: a) dacă M_1 are abscisa lui E_1 și ordonata lui D_1 , elipsa obținută are axa mare orizontală (fig. 9 a); b) dacă M_1 are abscisa lui D_1 și ordonata lui E_1 , elipsa are axa mare verticală (fig. 9 b).

Isaac **Newton**, matematician și fizician englez (1642 - 1726) a adus modificări acestei metode, considerând centrele cercurilor mici deplasate pe axa Ox. Deosebim și aici două situații: a) când secanta variabilă are originea în centrul O al cercului mare (fig. 10 a); b) când originea este în centrul O_1 al cercului mic (fig. 10 b).

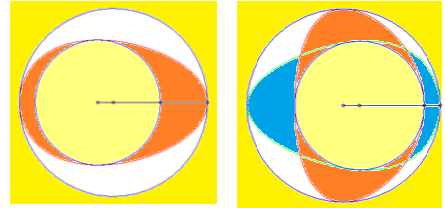


Fig. 10. a

b

Figurile 10 a și b sunt realizate pentru cazurile particulare $a=6$, $b=4$ și $d=1$.

Tot Isaac Newton a considerat și un alt caz de deplasare, și anume când centrul cercului mic se află pe cercul mare, adică $a = d = 6$ (fig. 10 c).

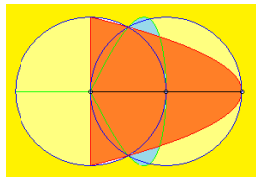


Fig. 10. c

2. Ovoidele lui Newton pot fi trasate cu rigla și compasul, iar - mai nou - prin programare la calculator

Prezentăm prima metodă, când se cunosc ambele axe:

- (1) Stabilim pe Ox și Oy axele date, dar cu originea O deplasată lateral de mijlocul axei mari (de exemplu spre dreapta);
- (2) Arcul de cerc cu originea în O și raza OC taie dreapta OA în E;
- (3) Arcul cu centrul în A și raza EA taie segmentul AC în F;
- (4) Mediatoarea segmentului CF intersectează axa mare în G (centru de racordare) și prelungirea axei mici în H (centru de racordare);
- (5) Notăm cu L (centru de racordare) simetricul lui H față de O;
- (6) Arcul de cerc cu centrul în G și raza GC taie dreptele GH în P și pe LG în R;
- (7) Curba se finalizează prin trasarea arcelor PA (centrul în H, raza HA), RB (centrul în L, raza LB) și ADB (centrul în O, raza OD) (fig.11).

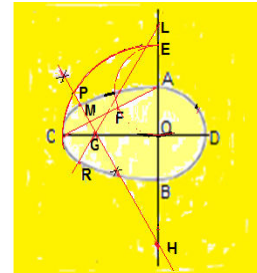


Fig. 11.



Matematicianul francez René Descartes (1596-1650), considerat inventatorul sistemului de coordonate carteziene a realizat, în legătură cu aplicațiile în optică, o descriere matematică a unor curbe care generalizează elipsa. În **La Geometrie**, a publicat în 1637, o secțiune de aproximativ 15 pagini pentru a discuta ceea ce el numea **elipsuri bifocale**. Un oval bifocal a fost definit acolo ca locul geometric al unui punct M care se mișcă într-un plan astfel încât $MP + m MQ = a$, unde P și Q sunt puncte fixe (focare) în

plan, iar m și a sunt constante care pot fi pozitive sau negative.

Nota: 1. În cazul $m = 1$ și $a > PQ$, se obține o **elipsă**, iar în cazul în care $m = -1$ și $a < PQ$ rezultă o **hiperbolă**, iar când P și Q coincid se obține un **cerc**.

2. Aceste curbe au fost, de asemenea, studiate și de **Newton** începând din 1664.

O metodă de desenare a anumitor ovaluri carteziene, deja folosită de Descartes, este analogă cu o construcție standard a unei **elipse** prin fir întins. James Clerk Maxwell a realizat o asemenea construcție folosind știfturi, creioane și șnururi. A întins un fir dintr-un știft (focar), l-a înfășurat în jurul unui bolț (al doilea focar) și a legat capătul liber al firului de un creion. Traectoria trasată este un oval cartezian cu un raport 2 : 1 între distanțele de la cele două focare.

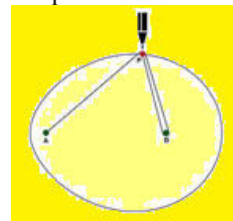


Fig. 12.

În figura 12 este redată construcția ovalului definit de $MP + 2MQ = a$.

Cu toate acestea, Newton a respins astfel de construcții ca fiind insuficient de riguroase. El a definit ovalul drept soluție a unei ecuații diferențiale, a construit subnormalele și a cercetat proprietățile optice.

Matematicianul francez Michel Chasles a descoperit în secolul al XIX-lea că, într-un oval cartezian definit de punctele P și Q , există, în general, un al treilea punct R , astfel încât același oval este de asemenea definit de orice pereche din aceste trei puncte.

Bazat pe aceasta, se poate realiza o construcție practică a unor curbe, folosind un creion, trei cuișoare și un fir. Se știe că o modalitate simplă de a trasa o elipsă este să folosim un creion, două cuișoare fixate pe o placă și un fir legat de ele. Vârful creionului care ține firul întins menține o sumă constantă a distanțelor față de cele două cuișoare (focare), deci va trasa o elipsă (metoda grădinarului) (fig. 13 a).

Făcând același lucru cu trei cuișoare, pe măsură ce se mută creionul în jurul triunghiului format de cele trei cuișoare, capătul îndepărtat al buclei este prins pe diferite combinații de focare, uneori câte două cuișoare și câteodată trei. (fig. 13 b).

Fiecare combinație corespunde unui arc eliptic diferit, unde fiecare arc este legat de arcele formate prin extinderea celor determinate de fiecare pereche de focare.

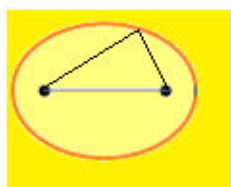
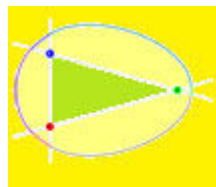


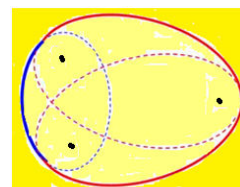
Fig. 13. a



b



c

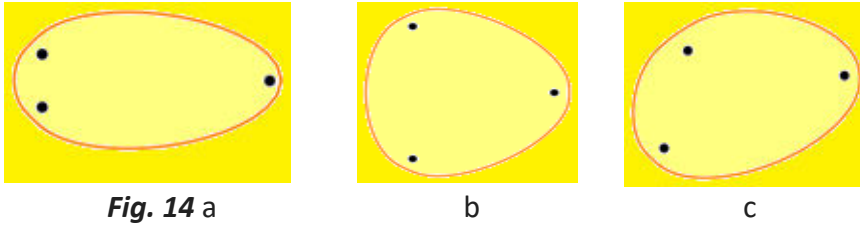


d

Dacă cuișoarele sunt aranjate într-un triunghi isoscel, figura finală are o formă de ovoid (fig. 13 c).

Elipsele individuale care alcătuiesc curba sunt redată în figura 13 d.

Nota: Firește, alte aranjamente oferă diferite forme finale (fig 14)



James Clerk Maxwell a redescoperit aceste curbe, le-a generalizat la altele definite prin menținerea constantă a sumei ponderate a distanțelor de la trei sau mai multe focare și a scris o lucrare intitulată **Observații asupra figurilor circumscripționate având o pluralitate de focare**. O relatare a rezultatelor sale, intitulată **Pe descrierea curbelor ovale și a celor cu o pluralitate de focare**, a fost scrisă de J. D. Forbes și prezentată Societății Regale din Edinburgh în 1846, când Maxwell era la vârsta fragedă de aproape 15 ani.

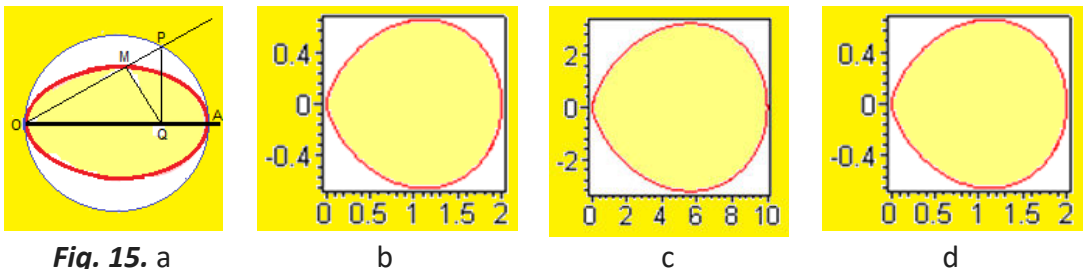
III. Curbele - ovoid obținute prin rezolvarea unor probleme de locuri geometrice, cum rezultă din exemplele următoare:

1. Curba - ovoidul lui Kepler



Fie un cerc (C) cu diametrul $[OA] = a$ și un punct variabil P pe (C). Notăm cu Q proiecția lui P pe OA și cu M proiecția lui Q pe OP. Se cere locul lui M când P se deplasează. (fig. 15 a). În coordonate carteziene ecuația este $(x^2 + y^2)^2 = ax^3$, iar în coordonate polare $r(t) = acos^3 t$.

Curba, numindu-se și foliul sau oul lui Kepler, a fost studiată de Johannes Kepler în 1609 și de Vicenzio Viviani în 1647, iar graficul său este



redat în figurile 15: b) pentru $a = 1$, c) pentru $a = 5$ și d) pentru $a = 0,5$;

În cazul general se obține ecuația $(x^2 + y^2)(y^2 + x(x+b)) = 4axy^2$, noi prezentând graficele unor cazuri particulare:

1. Când $b = 4a$ se obține foliul simplu (curba oului, curba lui Kepler, ovoidul) reprezentat în figura 16 a pentru $a = 1$ și $b = 4$;

2. Când $b = 0$, se obține bifoliu reprezentat în figura 6 b pentru $a = 1$;
3. Când $b = a$, se obține trifoliu, reprezentat în 16 c pentru $a = b = 1$;
4. Când b se află în alte cazuri, se obține un trifoliu reprezentat în figura 16 d. pentru $a = 4, b = 3$.

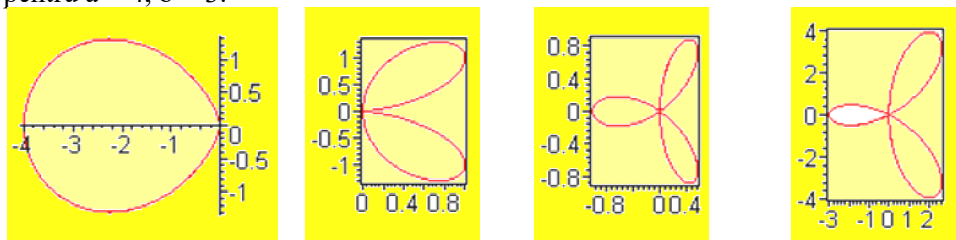


Fig. 16. a

b

c

d

2) Pe axa Ox a sistemului xOy se fixează un punct $A(a, 0)$ și un cerc de rază r , situat la distanța b de Oy (fig. 17 a). O dreaptă mobilă din A taie axa Oy în B și cercul în C . Paralelele prin B și C la axe se intersectează în P (fig. 17 b). Dacă punctul C se mișcă pe cerc, punctul P descrie o curbă - ovoid (fig. 17 c).

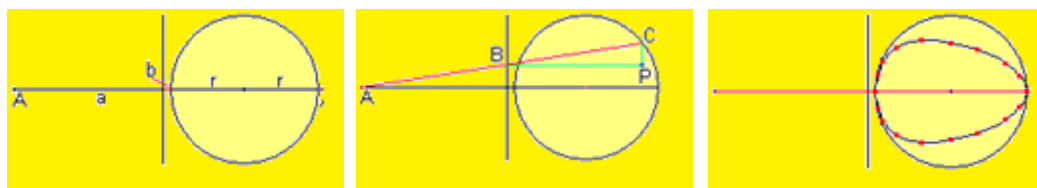


Fig. 17. a

b

c

3) Fie P un punct fix și un punct A , care se deplasează pe un cerc cu centrul în P , raza $r = PA$ și un segment $AQ = a$ (constant). Extremitatea liberă Q se mișcă pe o dreaptă care conține punctul P (fig. 18a) Punctul B de pe segmentul AQ , cu $BQ = b$ descrie o curbă-ovoid (fig. 18b)

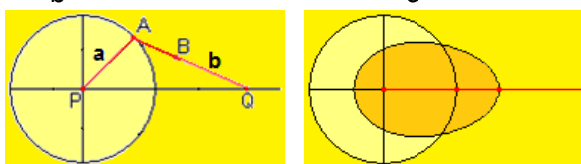


Fig. 18. a

b

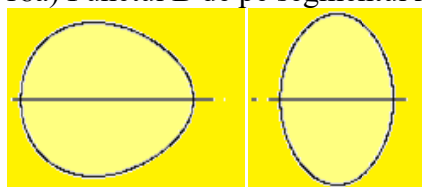


Fig. 19. a

b

IV. Curbele – ovoid ca imagini ale unor ecuații de gradele III și IV de forma I. $y^2 = p(x-a)(x-b)(x-c) \dots$

Prezentăm două exemple :

- a) $2y^2 = (x-1)(x-2)(x-3)$ (fig. 19 a) și
- b) $y^2 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (fig. 19 b)

sau forma II. polară.

Două exemple:

II. a) ecuația $r(t) = \cos^3 t$ produce foliul sau oul lui Kepler (fig. 20 a),

b) $r(t) = \sin^3 t + \cos^3 t$ dă un ou strâmb (fig. 20 b).

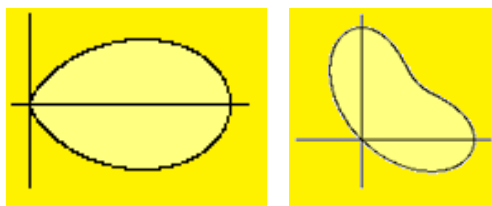


Fig. 20. a

b

Alte ecuații interesante: a) $y^4 + 10y^2x^2 + 5x^4 = y$ care ne dă oul lui Columb (fig. 21 a), și b) ecuația lui Florian Blaschke $x^{1.5} - 1,5^{0.5}x + y^2 = 0$ (fig. 21 b) care, prin generalizare devine $x^{1.5} - a^{0.5}x + y^2 = 0$, iar pentru $a = 1, 2, 3$ obținem curbele ovoid din figura 21 c.

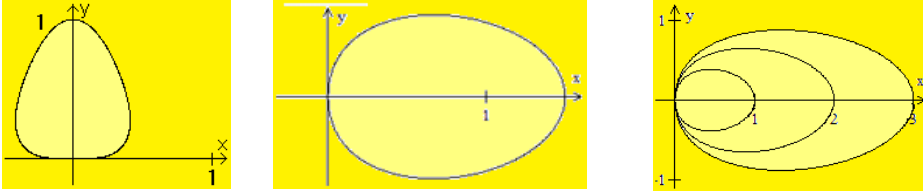


Fig. 21. a

b

c

Sunt relații ale căror imagini ne dau curbe multiple. Spre exemplu, ecuațiile

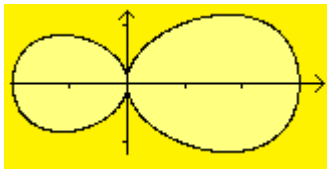
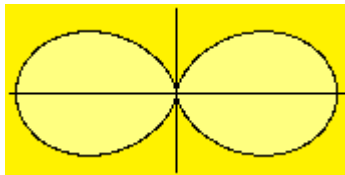


Fig. 22. a



b

$x^4 + 2x^2y^2 + 4y^4 - x^3 - 6x^2 - xy^2 = 0$ (fig. 22 a) și forma polară $r(t) = \cos^2 t$ (Münger 1894) produc ovoide duble (fig. 22 b).

Altele dau curbe - ovoid periodice, numite lanțuri. Exemple prin figurile 23

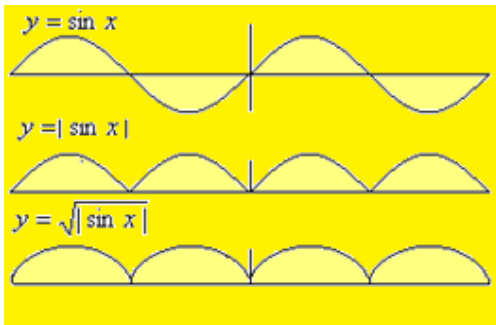
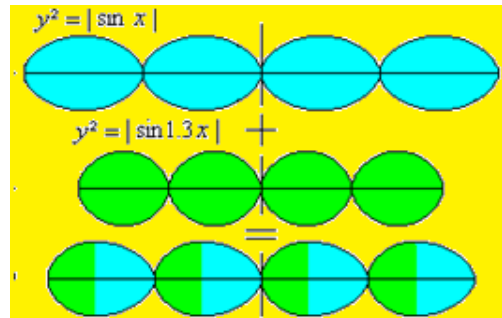


Fig. 23. a



b

Ecuația $y^2 = |\sin x + 0.1 \sin 2x|$ descrie un lanț de sinusuri (fig. 23 c).

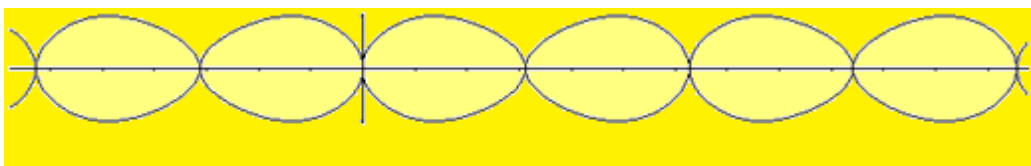


Fig. 23. c

V. Curbele – ovoid se pot obține și din alăturarea a două segmente din curbe cunoscute.

Exemplu: Se poate uni un semicerc cu o semielipsă ca în figura 24 sau alte combinații.

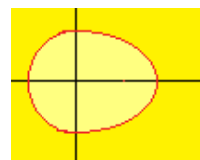


Fig. 24.

V. Aplicații în practică

Forma ovoidală poate fi întâlnită la profilul unor piese ale organelor de mașini, în construcții la canalizări și drenaje, în proiectarea unor rezervoare și cupatoare, la modele geometrice decorative, la unele ustensile casnice și articole sportive, jocuri etc.

Redăm câteva exemple:

1. Tuburile de drenaj sau de canalizare

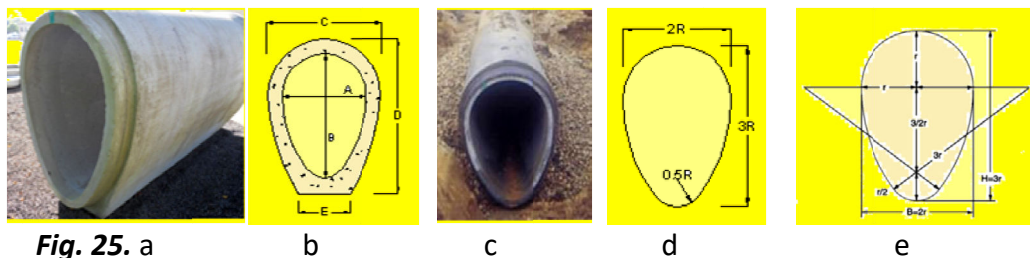


Fig. 25. a

b

c

d

e

Sunt recomandabile datorită unor caracteristici bine determinate (fig. 25):

- Conducta ovoidală are caracteristici de viteză mai bune la debite mici decât conductele circulare echivalente;
- Costurile de exploatare sunt și ele mai mici, în cazul în care canalizările pot fi stabilite fără a fi nevoie de pompare;
- Se curăță mai bine și, prin urmare, mai puțin risc de blocaj;
- Costuri reduse la săpat tranșee care rezultă din gradienti puțin adânci; e.

Capacitățile țevelor ovoidale sunt 1,6 ori capacitățile conductelor circulare la aceeași lățime, în timp ce vitezele sunt similare.

În urma calculelor de rezistență, s-a ajuns la concluzia că ovoidul cel mai indicat este cel în care raportul dintre axa mică **A** și cea mare **B** este $2/3$ (fig. 25 b, d). Dimensiunile standard de execuție în mm, pentru **A** și **B** sunt: (400, 600); (600, 900); (900, 1200).

2. Canal ovoidal colector

Proiectarea grafică a curbei – ovoid din interiorul tubului, începe (1) cu trasarea a două cercuri tangente exterior $C_1(O_1, r)$ și $C(O, R=2r)$. (2) Diametrul **AB** orizontal al cercului mare se împarte în 4 părți egale, obținându-se punctele O_2 și O_2^1 . (3) Se unesc O_2 și O_2^1 cu O_1 . (4) Se construiește mediatoarea segmentului $O_2^1O_1$ care

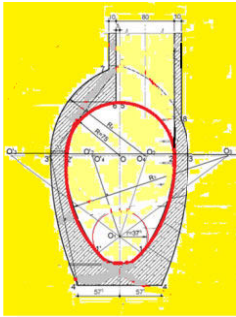


Fig. 26.

intersectează dreapta AB în O_3 (centru de racordare). (5) Notăm cu O_3^1 simetricul lui O_3 față de O. (6) Semidreptele obținute prin unirea lui O_3 și O_3^1 cu O_1 intersectează cercul mic dincolo de O_1 în punctele de tangență 1 și respectiv 1^1 . (7) Se trasează arcul de racordare $2^1 1^1$ cu centrul în O_3 și apoi arcul simetric cu centrul în O_3^1

Pentru proiectarea curbei exterioare se procedează analog, dar se ține cont de precizările proiectantului: grosimea tubului, dimensiunea bazei de susținere mărime agurii de acces etc. Unele repere sunt prezentate în figura alăturată

3. Rezervoare și cuptoare

Multe rezervoare și cuptoare au fost proiectate și realizate sub formă de ovoid. De ce? Există mai multe motive posibile: Asociația "Eau-Vivante" a experimentat, cu ocazia creării unui rezervor de recuperare a apei de ploaie, faptul că forma unui ovoid pentru acest rezervor a permis ca apa să rămână curată mai mult timp. De asemenea, un cuptor de pâine de această formă, cu condiția ca gura lui să fie pe partea indicată în figura 27, distribuie mai bine căldura și permite

lopeții brutarului să acceseze cu ușurință toate punctele de pe talpă. În practică, arcul gurii cuptorului va fi construit în jurul punctelor E și F (R și S din diagrama din dreapta).

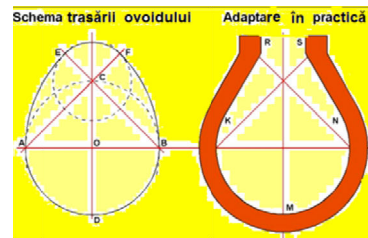


Fig. 27.

4. Rezervoare pentru fermentarea vinului



Fig. 28.

Potrivit lui Miguel Delso Martínez ("Studiul influenței depozitului ovoidal din beton în dezvoltarea și evoluția vinurilor albe"), acest rezervor permite fermentări mai lungi prin disiparea mai bună a temperaturii. Micro-oxigenarea prin pereți, similară cu cea a butoaielor, are loc cu un material cu structura mai puțin aromatică și, prin urmare, cu un impact mai mic asupra vinului (fig. 28). Toate aceste caracteristici dau producătorului un instrument bun pentru a dezvolta diferite tipuri de vin și a crea propriul stil.

5. Realizare tangram

Tangram-ul este un vechi joc de puzzle, de origine chineză, cunoscut și sub denumirea „pătratul magic” sau „placheta celor șapte șiretlicuri”. Nu se știe cine l-a inventat, când anume și cu ce scop. Se știe doar că o carte din China anului 1813 i-a înregistrat existența – aceasta ar fi, deci, prima sa mențiune documentară – cu

observația că se bănuiește că jocul se folosea deja de multă vreme la acel moment.

Este popular și distractiv datorită structurii sale simple, ușor de înțeles și accesibil. Stimulează imaginația și logica cucerind prin simplitatea sa deopotrivă copiii și adulții, pe cei pasionați de matematică și pe cei cu înclinații artistice. Napoleon Bonaparte folosea jocul pentru a se relaxa înainte și după bătălii, poetul Edgar Allen Poe îl folosea pentru inspirație, în vreme ce Lewis Carroll, autorul cărții Alice în țara minunilor, era pur și simplu fascinat de acest joc (fig. 29 a).

Peste 1600 de imagini reprezentând animale, păsări, vietăți marine, oameni, litere, cifre, obiecte, castele, vapoare și multe altele pot fi create din cele 7 piese ale tangramului (fig. 29 b, c, d).

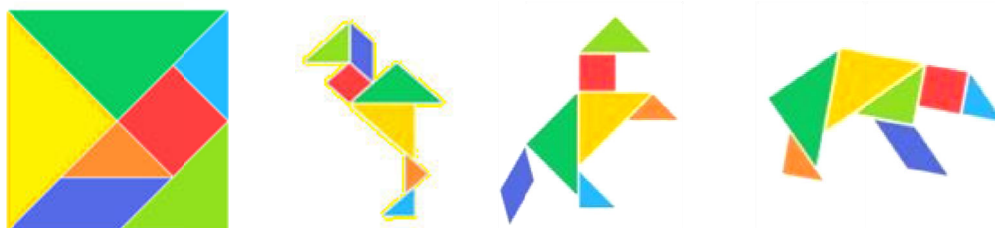


Fig. 29. a

b

c

d

Există mai multe variante de tangramuri, obținute prin împărțirea în diverse feluri a pătratului, cercului, ovalului, triunghiului *etc.* *Etapele de introducere a unui tip nou joc, ca și regulile de aplicare sunt aceleași ca la Tangramul original. Poate că nu toate au aceeași capacitate de figurare ca Tangramul, dar unele dintre ele au o expresivitate deosebită.*

O astfel de variantă este **OUL LUI COLUMB** reprezentat în figura 30 c și din piesele cărui se pot concepe nenumărate siluete de păsări și alte figuri.

Redăm, în continuare, modul de construcție cu rigla și compasul a acestei variante: (1) Se trasează două cercuri C_1 și C_2 de centre O_1 și O_2 cu razele R , astfel ca fiecare să treacă prin centrul celuilalt; (2) Stabilim un sistem de axe de coordonate xOy , axa x -lor să conțină centrele lor, iar axa y -lor să treacă prin intersecțiile A și B ale cercurilor; (3) Desenăm cercul C_3 cu centrul în O și raza OO_1 ; (4) Acesta taie pe AB în C și D ; (5) Dreptele O_1C și O_2C intersectează cercurile inițiale în E și F ; (6) Cu centrele în C și D și raza $CE = CF$ trasăm cercurile C_4 și C_5 ; (7) Cercul C_5 (cu centrul în D) taie pe AD în G ; (8) Prin G trasăm paralele la O_1C și la O_2C (fig. 30 a); (9) Considerăm doar interiorul comun al cercurilor inițiale și înlăturăm părțile albe din figura 30 b; (10) Decupăm cele nouă părți colorate din figura 30 c și putem să realizăm o figură ca în imaginea 30 d.

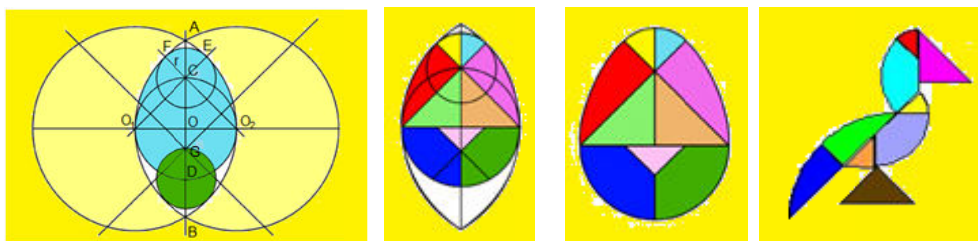
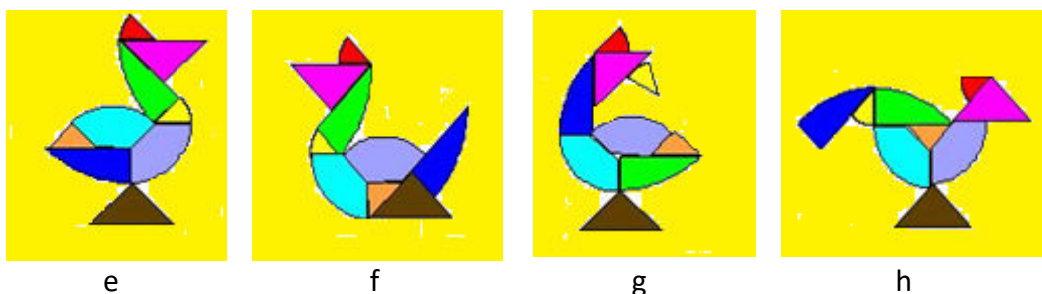


Fig. 30. a

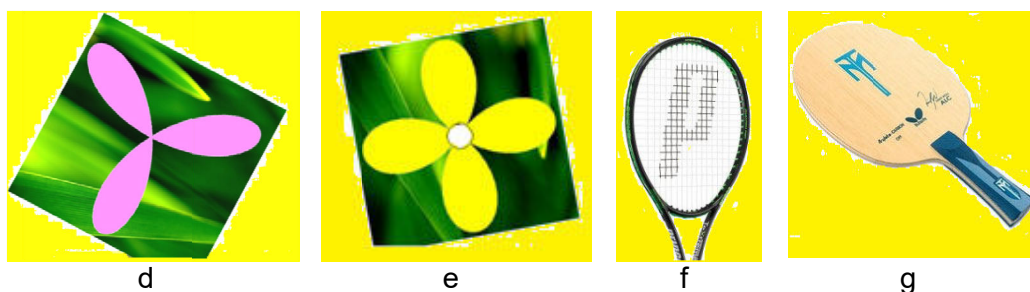
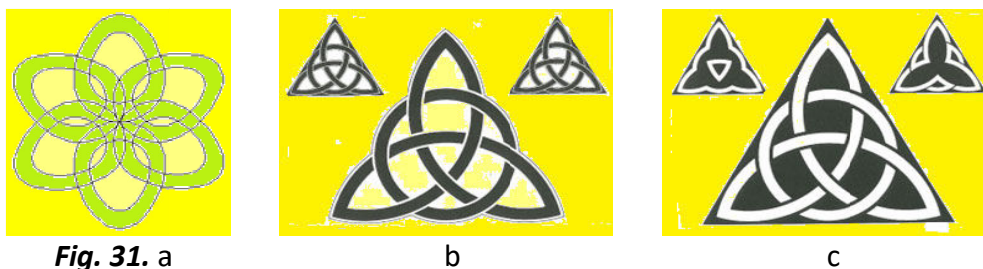
b

c

d



6. Modele geometrice decorative, florale și altele (fig. 31).



Bibliografie

1. Dicționarul Enciclopedic Român, vol III, Editura politică, București, 1963;
2. Dicționar de Matematici Generale, Editura Enciclopedică Română, 1974;
3. Dicționarul Limbii Române pentru Elevi (DREV), Edirura Didactică și Pedagogică, București, 1983;
4. Dicționarul de Neologisme, Editura Academiei Socialste Române, București, 1978;
5. Matei ALEXANDRU & colectiv, Desen Tehnic Industrial, Institut Politehnic Iași, 1963;
6. Cantemir Lorin, Antonovici C., Andrei Șt. Evoluția unor instrumente și dispozitive geometrice utilizate în matematică, arhitectură și construcții;
7. Articole tematice de pe Internet.