MODURI DE REPREZENTARE A LINIILOR. SECŢIUNEA DE AUR

Nadejda MALAŞEVSCAIA

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *În lucrare se examinează modurile de definire a unei linii. Linia poate fe determinată ca graficul unei funcţii, graficul unei ecuaţii. Ea poate fi reprezentată ca traiectoria deplasării unui punct sau, mai general, în mod parametric. În spaţiu, linia poate fi determinată ca intersecţia a două suprafeţe. Prin modificarea unor parametri se poate modifica înfăţişarea liniei. Acest lucru se face în exemplul astroidei. Se examinează apoi secţiunea de aur cu câteva exemple.*

Cuvinte cheie: *Sistem de coordonate, graficul unei funcţii, graficul unei ecuaţii, ecuaţii parametrice*.

Pentru un arhitect, linia este elementul principal de lucru, de formare şi realizare a concepţiilor şi ideilor pentru viitoarea consctrucţie. Dar ce este o linie din punctul de vedere al matematicii? Urma unui creion? Traiectoria mişcării unui punct? Graficul unei funcţii? De toate, într-o anumită proporţie.

Elaborarea, în sec. 17, de către Rene Decart (R. Descartes) a sistemului ortogonal de coordonate a constituit un punct de cotitură în dezvoltarea matematicii. Studiul multor obiecte geometrice (linii, suprafeţe, figuri) a fost redus la studiul obiectelor algebrice (ecuaţii, inecuaţii) sau la cel al analizei matematice (de exemplu, la studiul funcţiilor). Linia este primul dintre aceste obiecte geometrice. Într-un sistem de coordonate (cartezian sau polar) linia plană poate fi determinată diferit: *explicit, implicit, parametric*.

1. Reprezentarea explicită a liniei. Oricare linie L din planul XOY este o mulţime de puncte de forma $M(x, y)$. Linia este determinată explicit, dacă ordonata oricărui punct al ei este funcţie de abscisă:

$$y = f(x) \tag{1}$$

În acest caz, linia L este graficul funcţiei $f(x)$. Dreapta este, poate, cea mai perfectă linie. Oricare dreaptă, cu excepţia celor paralele axei OY, are o reprezentare simplă: $y = mx + b$.

În sistemul polar de coordonate, o linie de asemenea este o mulţime de puncte $M(\rho,\theta)$. Sub forma explicită, o linie poate fe reprezentată de ecuaţia $\rho = f(\theta)$. În acest sistem, multe funcţii reprezintă linii exotice, care în sistemul cartezian nici nu-şi au locul. De exemplu, în sistemul XOY cercul nu este graficul unei funcţii. În cel polar el este determinat de funcţia simplă $\rho = R$ (R – const.). Alt exemplu: funcţia $\rho = a\sin 3\theta$ ($a > 0$) reprezintă *roza cu trei petale* (Fig. 1,a)).

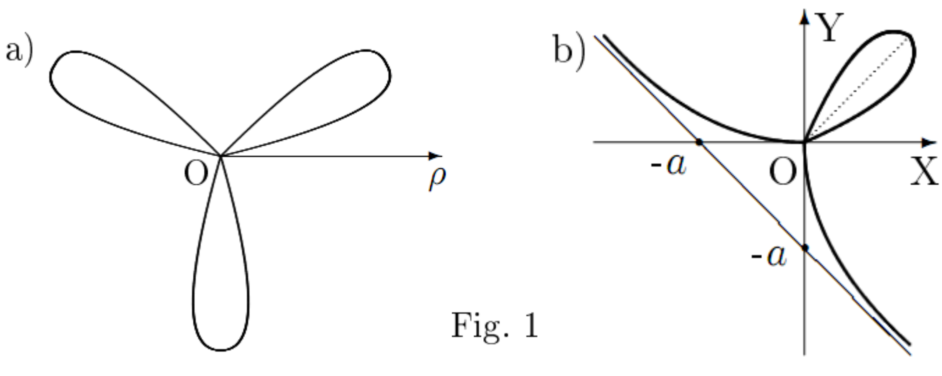

Fig. 1

2. Reprezentarea implicită a liniei.

În acest caz, coordonatele (x, y) ale oricărui punct M de pe linia L reprezintă o soluţie a unei ecuaţii cu două necunoscute:

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Se mai spune, că linia L este graficul acestei ecuaţii. De obicei, trasarea liniei după ecuaţia (2) întâmpină anumite dificultăţi. Reprezentări implicite au bine cunoscutele conice (secţiuni conice): cercul, elipsa, hiperbola şi parabola. O linie mai puţin cunoscută este determinată de ecuaţia $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$, numită *foliul lui Decart* (Fig. 1,b)). Această linie a fost examinată e însuşi Rene Decart, ca exemplu de construcţie a graficului unei ecuaţii.

Remarcă. Oricare reprezentare explicită poate fi tratată şi ca una implicită: e suficient de scris egalitatea $y = f(x)$ sub forma unei ecuaţii cu două necunoscute, $y - f(x) = 0$. Trecerea inversă, de obicei este dificilă sau chiar imposibilă.

3. Reprezentarea parametrică a liniei. Considerente cinematice sugerează încă o formă de a determina linia plană. Privind linia ca traiectoria unui punct material *M*, coordonatele acestuia se prezintă ca funcţii de timpul *t*:

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{3}$$

Ecuaţiile (3) reprezintă *ecuaţiile parametrice* ale liniei *L*. Variabila t se numeşte *parametru*; el poate avea şi alt sens (de exemplu, unghi), dar poate fi lipsit de vre-un sens fizic sau geometric.

Remarcă. Dacă funcţiile $x(t)$ şi $y = y(t)$ sunt continue pe un interval *I* (închis sau deschis, finit sau infinit), atunci ele determină o linie în planul XOY.

Exemple. **1.** Oricare dreaptă poate fi determinată de ecuaţiile parametrice $x = at + x_0$, $y = bt + y_0$. Când parametrul *t* parcurge mulţimea tuturor numerelor reale, punctul *M* cu coordonatele (x, y), calculate con-form acestor egalităţi, parcurge toată dreapta *L*.

2. Cercul cu ecuaţia canonică $x^2 + y^2 = R^2$ admite şi ecuaţiile parametrice $x = R\cos t,\ y = R\sin t$. Aici parametrul *t* este unghi.

3. Elipsa cu ecuaţia canonică $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ are reprezentarea parametrică $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

4. *Astroida* (Fig. 2, a)) este determinată de ecuaţiiule $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$; $a > 0$. Ea are 4 axe de simetrie – axele de coordonate şi bisectoarele cadranelor. Originea de coordonate este centrul ei de simetrie.

Înlocuind ecuaţia a doua cu ecuaţia $y = b\sin^3 t,$ se obţine o linie doar cu două axe de simetrie (Fig. ,b)). Dacă se trece la ecuaţiile parametrice

$$x = a\cos^3 t,\ y = b\sin^3 t \quad \text{pentru} \quad 0 \le t \le \pi;$$

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t \quad \text{pentru} \quad \pi < t < 2\pi,$$

se obţine linia cu o singură axă de simetrie (axa Oy, Fig. 2,c)).

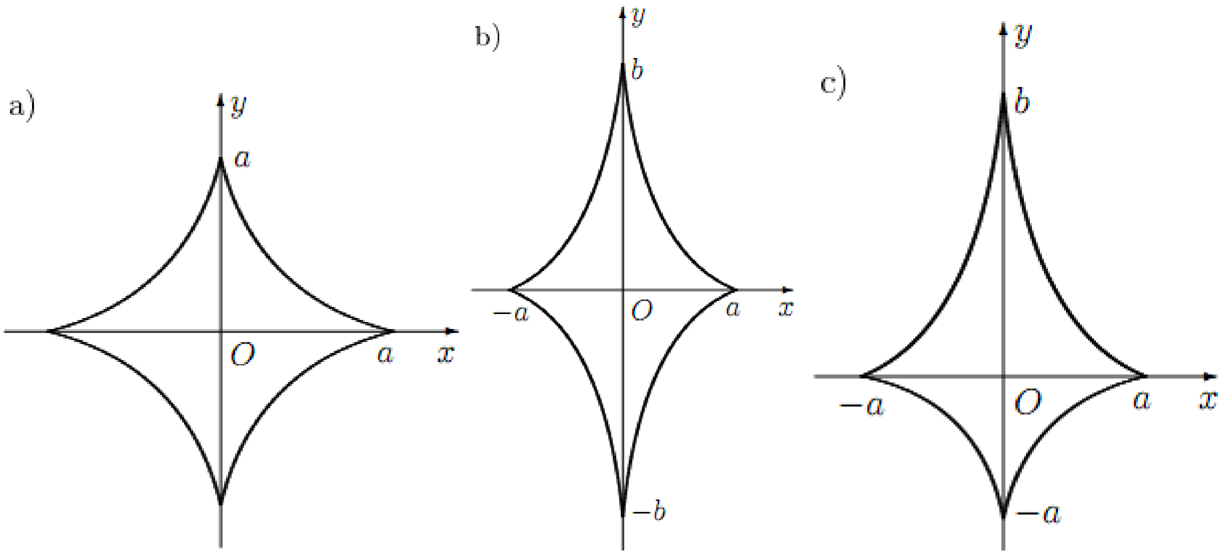

Fig. 2

4. Liniile în spaţiu. În sistemul de coodonate $OXYZ$ liniile pot fi determinate prin două metode principale: ca intersecţia suprafeţelor şi în mod parametric (în particular, ca traiectoria mişcării unui punct).

Cel mai simplu exemplu de a determina linia ca intersecţia a două suprafeţe este dreapta în spaţiu. Ea reprezintă intersecţia a două plane, iar ecuaţiile ei se scriu ca sistemul, format de ecuaţiile acestor plane.

Conicele, sau liniile de ordinul doi sunt liniile, obţinute la intersecţia unei suprafeţe conice cu un plan. În funcţie de poziţia planului faţă de suprafaţa conică, se obţin toate liniile de ordinul 2: cercul, elipsa, hiperbola şi parabola.

Mai frecvent se foloseşte reprezentarea parametrică a liniei. Coordonatele (x, y, z) ale oricărui punct al liniei se prezintă ca funcţii de un parametru t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \qquad (4)$$

Exemplul 1. Sunt bine cunoscute ecuaţiile parametrice ale dreptei în spaţiu:

$x = at + x_0,\ y = bt + y_0,\ z = ct + z_0$.

Când parametrul *t* parcurge mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, punctul *M* cu coordonatele, calculate conform acestor formulele, parcurge toată dreapta.

Exemplul 2. *Spirala cilindrică* este determinată de ecuaţiile parametrice

$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = ht$.

O asemenea formă are filetul unui şurub; constanta *h* reprezintă pasul filetului. Traiectoria rotaţiei unui punct de pe elicea avionului în zbor de asemenea descrie o astfel de linie. Schimbând coeficienţii din faţa expresiilor pentru $x,\ y,\ z$, se pot obţine alte forme ale spiralei: spirala conică, spirala exponenţială etc. Ultima are ecuaţiile $x = ae^t \cos t, y = ae^t \sin t, z = ae^t$.

Revenind la modificările astroidei se vede, că o linie poate fi mai mult sau mai puţin atrăgătoare în funcţie de raportul anumitor părţi ale ei. Un raport optim, în care linia sau figura capătă înfăţişarea cea mai plăcută, era cunoscut încă în antichitate; este vorba despre secţiunea de aur.

Fie *M* un punct al segmentului *AB*. Dacă *M* este mijlocul acestui segment, atunci el este centrul de simetrie, iar mediatoarea segmentului este axa lui de simetrie. Un punct împarte segmentul într-un raport, numit *secţiunea de aur*, dacă segmentul mai mare se raportă la segmentul mai mic la fel cum întregul segment se raportă la cel mai mare. De obicei acest raport se notează cu Φ , în semn de omagiu adus renumi-tului sculptor al Greciei antice Fidias. Numărul Φ este iraţional, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$ Pentru aflarea aces-tui număr este suficient de alcătuit şi de rezolvat o ecuaţie de gradul doi. Pentru a afla punctul, care împarte un segment dat în raportul Φ , se poate folosi doar rigla şi compasul.

Raportul secţiunii de aur era întotdeauna respectat în pictură, sculptură, arhitectură. Drept exemplu poate servi Partenonul din Atena, construit cu aproape două milenii şi jumătate în urmă. În toate componentele lui, - construcţia însăşi, renumita friză din interior, sculpturile etc. – proporţiile, determinate de numărul Φ, sunt respectate cu sfinţenie. În piramidele egiptene (Fig. 3) raportul apotemei către jumătatea laturii bazei este exact numărul Φ: $AV : AO = \Phi$. Şi mai evident este acest raport în opera marelui C. Brâncuşi „Poarta sărutului” (Fig. 4).

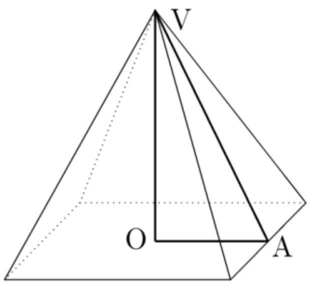

Fig. 3

Fig. 4

Bibliografie:

1. Клетеник, Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*. М., Наука, 1967.