

## NOI SOLUȚII INTEGRALE TERMOELASTICE PENTRU SEMISPAȚIU

**Ion Crețu, lector univ.**

Universitatea Tehnică a Moldovei

### INTRODUCERE

Obținerea soluțiilor integrale în termoelasticitate de la acțiunea unei surse interioare de căldură, a unui gradient de temperatură și alte acțiuni termice date pe suprafața corpului este un rezultat important în acest domeniu. Însă pentru obținerea acestor soluții este necesar să fie dezvoltate alte teorii cu ajutorul cărora pot fi obținute noi expresii. O astfel de metodă a fost propusă de V. Șeremet numită Metoda Reprezentărilor Integrale Armonice (MRIA). În acest articol pentru prima dată au fost propuse expresiile pentru deplasările termoelastice într-un semispațiu de la acțiunea unui gradient de temperatură cu anumite condiții de limită.

### 1. DISPOZIȚII GENERALE

Prin generalizarea formulei lui Maysel [1] și a formulelor integrale Green, V. Șeremet a propus o nouă formă a acestor integrale [2],[3],[4],[5]:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & a^{-1} \int_V F(x) U_i(x, \xi) dV(x) \\
 & - \int_{\Gamma_D} T(y) \frac{\partial U_i(y, \xi)}{\partial n_y} d\Gamma_D(y) \\
 & + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} U_i(y, \xi) d\Gamma_N(y) \quad (1) \\
 & + a^{-1} \int_{\Gamma_M} \left[ \alpha T(y) + a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \right] U_i(y, \xi) d\Gamma_M(y); \\
 & \quad i = 1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

unde:  $\Gamma_D, \Gamma_N$  și  $\Gamma_M$  sunt părți componente a suprafeței corpului  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_M$  pe care sunt definite condițiile de limită de tip Dirichlet (temperatura  $T(y)$ ), Neumann (fluxul de căldură

$a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y}$ ) și mixt (are loc schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului după

legea  $\left[ \alpha T(y) + a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \right]$ ;  $a$  - coeficientul conductivității de temperatură;  $F(x)$  - sursa interioară de căldură;  $\alpha$  - coeficientul conductibilității convective de căldură;  $\gamma = \alpha_i(2\mu + 3\lambda)$  - constanta termoelastică;  $\alpha_i$  - coeficientul dilatării termice liniare,  $\lambda, \mu$  - constantele de elasticitate Lamé,  $U_i$  - sunt funcțiile de influență a deplasărilor termice de la o sursă unitară de căldură, iar  $u_i$  - sunt deplasările termice calculate de la o sursă interioară de căldură și/sau gradient de temperatură și/sau flux de căldură și/sau schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului.

În formă matricială pentru problemele spațiale deplasările termice au forma:

$$U_i(x, \xi) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}; u_i(\xi) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Dacă sunt cunoscute deplasările termoelastice  $U_i$  și  $u_i$ , atunci pot fi calculate tensiunile termice  $\bar{\sigma}_{ij}(x, \xi)$  (funcțiile de influență a tensiunilor termice de la o sursă unitară de căldură) și  $\sigma_{ij}(\xi)$  (tensiunile termice calculate de la o sursă interioară de căldură și/sau gradient de temperatură și/sau flux de căldură și/sau schimbul de căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului) în baza legii lui Duhamel-Neumann [6]:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{ij}(x, \xi) = & \mu(U_{i,j} + U_{j,i}) + \delta_{ij}(\lambda\Theta - \gamma G_T); \\
 \Theta = & U_{k,k}; i, j, k = 1, 2, 3; \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(\xi) = & \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \delta_{ij}(\lambda\theta - \gamma T); \\
 \theta = & u_{k,k}; i, j, k = 1, 2, 3, \quad (4)
 \end{aligned}$$

unde:  $\delta_{ij}$  simbolul Kronecker, care este egal cu 1 dacă  $i = j$  și 0 dacă  $i \neq j$ .

## 2. DETERMINAREA DEPLASĂRILOR TERMOELASTICE ÎNTR-UN SEMISPAȚIU

### 2.1 Formularea problemei

Se cere să se determine deplasările termoelastice  $u_i(\xi); i = 1, 2, 3$  pentru o problemă de limită într-un domeniu de forma unui semispațiu  $S(0 \leq x_1 < \infty, -\infty < x_2, x_3 < \infty)$  cu condițiile de limită de tip Dirichlet. În limitele acestui domeniu acționează un gradient de temperatură  $T_0 = const$  pe un anumit segment de pe planul marginal  $\Gamma_{10}(y_1 = 0; -\infty < y_2, y_3 < \infty)$ .

$$T(y) = \begin{cases} T_{10}(0, y_2, y_3) = T_0 = const, \\ y \in (y_1 = 0; y_2 = c; a \leq y_3 \leq b); y \in \Gamma_{10}; \\ T_{10}(0, y_2, y_3) = 0, \\ y \in (y_1 = 0; -\infty < y_2, y_3 < \infty) \setminus \\ (y_1 = 0; y_2 = c; a \leq y_3 \leq b); y \in \Gamma_{10}. \end{cases} \quad (5)$$

Iar condițiile mecanice de limită pentru planul marginal  $\Gamma_{10}$  sunt următoarele:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0. \quad (6)$$

Condițiile de limită mecanice și cele termice pentru problema particulară sunt prezentate în Fig.1:

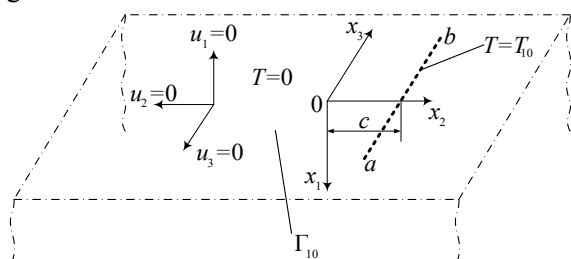


Figura 1. Schema semispațiului  $S$  cu condițiile mecanice de limită  $u_1, u_2, u_3$  și termice  $T$  pe  $\Gamma_{10}$ .

### 2.2 Determinarea funcțiilor de influență a deplasărilor termoelastice $U_i$

Pentru rezolvarea problemei enunțată mai sus și determinarea deplasărilor termoelastice  $u_i$  de la acțiunea gradientului, conform formulei integrale (1), este nevoie să fie stabilite expresiile analitice

ale deplasărilor termoelastice  $U_i$  de la acțiunea unei surse unitare punctiforme de căldură. Aceste deplasări au fost obținute de autor în lucrarea [7]. Ele au următoarea formă:

$$U_1(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ (\xi_1 - x_1)(R^{-1} - R_1^{-1}) - 2x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} R_1^{-1} \right]; \quad (7)$$

$$U_2(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ (\xi_2 - x_2)(R^{-1} - R_1^{-1}) - 2x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} R_1^{-1} \right]; \quad (8)$$

$$U_3(x, \xi) = \frac{\gamma}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ (\xi_3 - x_3)(R^{-1} - R_1^{-1}) - 2x_1\xi_1 B^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_3} R_1^{-1} \right]. \quad (9)$$

### 2.3 Determinarea deplasărilor termoelastice $u_i$

Conform condițiilor de limită termice (5), rezultă: sursa interioară de căldură  $F(x) = 0$ ,

fluxul de căldură  $a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} = 0$ , schimbul de

căldură dintre mediul exterior și suprafața corpului

$$\left[ \alpha T(y) + a \frac{\partial T(y)}{\partial n_y} \right] = 0. \text{ Semispațiul } S \text{ este}$$

acționat doar de un gradient de temperatură aplicat pe segmentul  $(y_1 = 0; y_2 = c; a \leq y_3 \leq b)$  de pe planul marginal  $\Gamma_{10}(a, b, c \in \Gamma_{10}; a < b)$ . Astfel formula integrală de tipul Green (1) se scrie în felul următor:

$$u_i(\xi) = \int_a^b T_{10}(0, y_2, y_3) Q_i(0, y_2, y_3; \xi) dy_3, \quad (10)$$

unde:

$$Q_i = \frac{\partial U_i}{\partial y_1} = - \frac{\partial U_i}{\partial n_y}. \quad (11)$$

Se substituie expresiile (7) – (9) în formula (11):

$$Q_1 = \frac{\partial U_1}{\partial y_1} = \frac{\gamma}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1^2}{R_{10}^3}; \quad (12)$$

$$Q_2 = \frac{\partial U_2}{\partial y_1} = \frac{\gamma}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1(\xi_2 - c)}{R_{10}^3}; \quad (13)$$

$$Q_3 = \frac{\partial U_3}{\partial y_1} = \frac{\gamma}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1(\xi_3 - y_3)}{R_{10}^3}, \quad (14)$$

unde:  $R_{10} = \sqrt{\xi_1^2 + (c - \xi_2)^2 + (y_3 - \xi_3)^2}$ , iar  $y_2$  s-a luat egal cu  $c$ , deoarece pe ordonata  $y_2 = c$  se află gradientul de temperatură.

Relațiile (12) – (14) se înlocuiesc pe rând în formula (10), se rezolvă integralele și se obțin expresiile finale ale deplasărilor termoelastice  $u_i(\xi)$  în semispațiul  $S$  de la acțiunea gradientului de temperatură aplicat pe planul marginal  $\Gamma_{10}$  conform condițiilor de limită (5):

$$u_1 = \frac{\gamma T_0}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1^2(y_3 - \xi_3)}{[\xi_1^2 + (c - \xi_2)^2]R_{10}} \Big|_a^b; \quad (15)$$

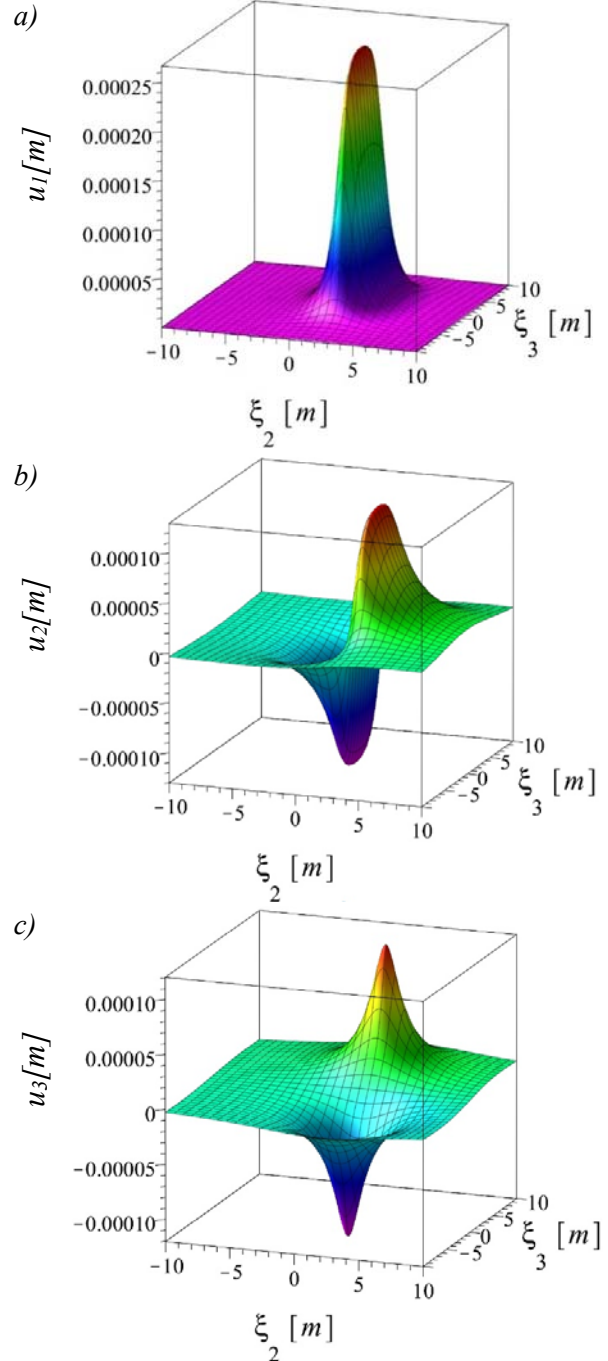
$$u_2 = \frac{\gamma T_0}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1(\xi_2 - c)(y_3 - \xi_3)}{[\xi_1^2 + (c - \xi_2)^2]R_{10}} \Big|_a^b; \quad (16)$$

$$u_3 = \frac{\gamma T_0}{2\pi(\lambda + 3\mu)} \cdot \frac{\xi_1}{R_{10}} \Big|_a^b. \quad (17)$$

### 3. REPREZENTAREA GRAFICĂ A DEPLASĂRILOR TERMOELASTICE ÎN SEMISPAȚIU

Deoarece aceasta este o problemă 3D, atunci pentru a construi graficele deplasărilor termoelastice, pe rând se va fixa câte o variabilă, iar graficele vor fi prezentate în raport cu variabilele rămase. Cu ajutorul programei Maple 18 au fost construite graficele deplasărilor termice  $u_i(\xi)$  în semispațiul  $S$  de la acțiunea unui gradient de temperatură  $T_0 = 50K$  aplicat pe segmentul  $y_1 = 0$ ;  $y_2 = c$ ;  $a \leq y_3 \leq b$ ; ( $a = -4m, b = 4m, c = 2m$ ) a planului marginal  $\Gamma_{10}$ . Pentru constantele elastice și termice au fost luate în calcul următoarele valori: coeficientul Poisson  $\nu = 0,3$ ; modulul de elasticitate  $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$ , iar coeficientul dilatării termice liniare  $\alpha_i = 1,2 \cdot 10^{-5} (K^{-1})$ .

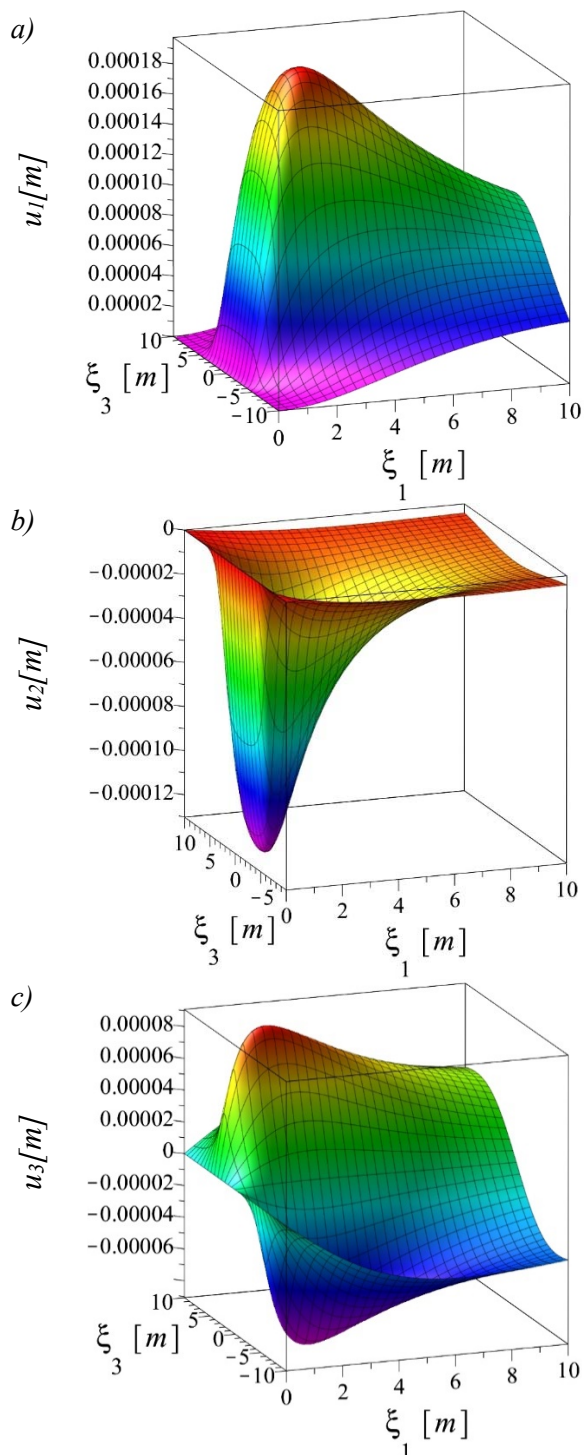
S-au construit graficele deplasărilor termoelastice  $u_i(\xi)$  în semispațiul  $S$  în limitele  $-10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$  și a planului care trece prin punctul  $\xi_1 = 1$ . Deplasările termice  $u_1, u_2$  și  $u_3$  au fost construite în baza formulelor (15) – (17) și sunt prezentate în Fig. 2:



**Figura 2.** Deplasările termoelastice  $u_1, u_2$  și  $u_3$  în semispațiul  $S$  în limitele  $\xi_1 = 1; -10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$ .

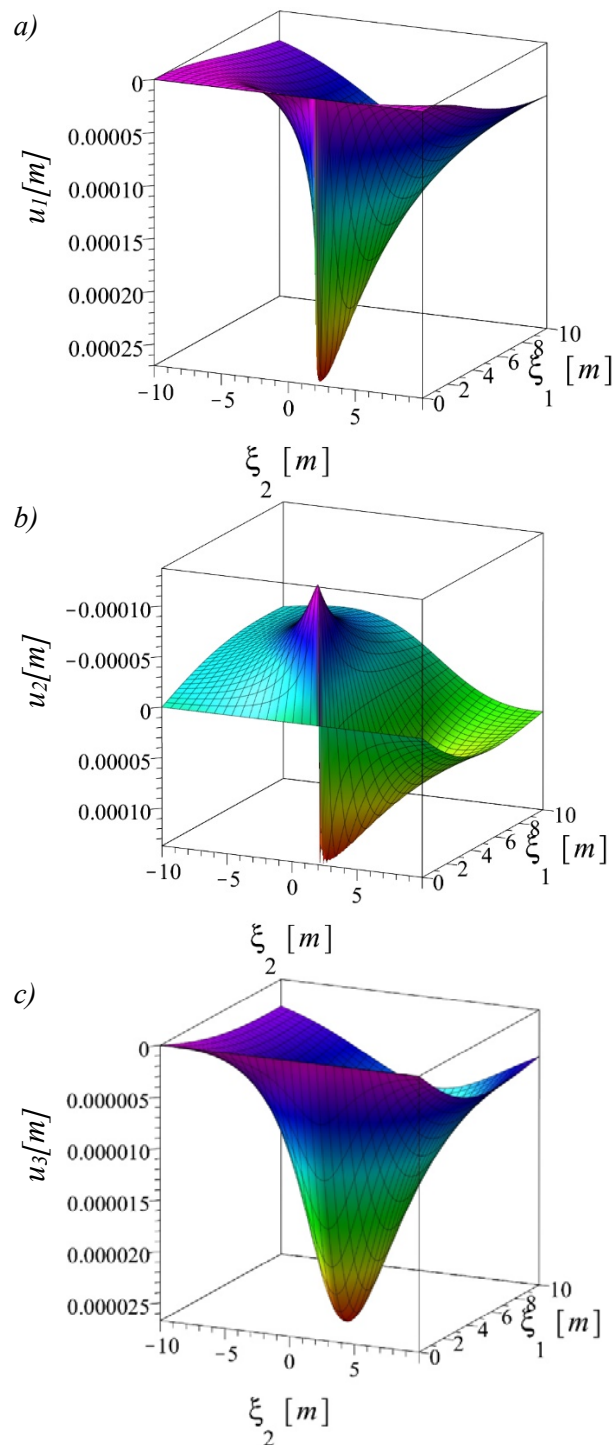
S-au construit graficele deplasărilor termoelastice  $u_i(\xi)$  în semispațiul  $S$  în limitele

$0 \leq \xi_1 \leq 10; -10 \leq \xi_3 \leq 10$  și a planului care trece prin punctul  $\xi_2 = 1$ . Deplasările termice  $u_1, u_2$  și  $u_3$  au fost construite în baza formulelor (15) – (17) și sunt prezentate în Fig. 3:



**Figura 3.** Deplasările termoelastice  $u_1, u_2$  și  $u_3$  în semispațiul  $S$  în limitele  $0 \leq \xi_1 \leq 10; \xi_2 = 1; -10 \leq \xi_3 \leq 10$ .

S-au construit graficele deplasărilor termoelastice  $u_i(\xi)$  în semispațiul  $S$  în limitele  $0 \leq \xi_1 \leq 10; -10 \leq \xi_2 \leq 10$  și a planului care trece prin punctul  $\xi_3 = 1$ . Deplasările termice  $u_1, u_2$  și  $u_3$  au fost construite în baza formulelor (15) – (17) și sunt prezentate în Fig. 4:



**Figura 4.** Deplasările termoelastice  $u_1, u_2$  și  $u_3$  în semispațiul  $S$  în limitele  $0 \leq \xi_1 \leq 10; -10 \leq \xi_2 \leq 10; \xi_3 = 1$ .

Analizând graficele din Fig. 2 – 4 se observă următoarele:

- se respectă condițiile de limită (5) enunțate în problemă: pentru planul marginal  $\Gamma_{10} \rightarrow$

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0;$$

- graficele deplasărilor termoelastice  $u_1$  și  $u_2$  au un salt de-a lungul segmentului unde este aplicat gradientul de temperatură (Fig. 2, a,b, Fig. 3, a,b și Fig. 4, a,b );

- graficele deplasărilor termoelastice  $u_3$  au un maximum local la capătul segmentului unde este aplicat gradientul de temperatură (Fig. 2, c, Fig. 3, c și Fig. 4, c );

- dacă ordonatele  $\xi_1 \rightarrow \infty$  sau  $\xi_2, \xi_3 \rightarrow \pm\infty$  atunci valorile deplasărilor termoelastice  $u_1; u_2; u_3 \rightarrow 0$ .

#### 4. CONCLUZII

Relațiile pentru deplasările termoelastice  $u_i(\xi)$  (15) – (17) pentru semispațiul  $S$  cu condițiile de limită (6) de la acțiunea unui gradient de temperatură (5) au fost determinate pentru prima dată. Toate expresiile au fost obținute în funcții elementare.

Deplasările termoelastice  $u_i(\xi)$  au fost reprezentate grafic în raport cu fiecare ordonată: pentru  $\xi_1 = 1$ ;  $-10 \leq \xi_2, \xi_3 \leq 10$ , pentru  $0 \leq \xi_1 \leq 10$ ;  $\xi_2 = 1$ ;  $-10 \leq \xi_3 \leq 10$  și pentru  $0 \leq \xi_1 \leq 10$ ;  $-10 \leq \xi_2 \leq 10$ ;  $\xi_3 = 1$  folosind programa Maple 18, cu analiza ulterioară ale acestor grafice.

Datorită expresiilor (15) – (17) pot fi obținute reprezentările grafice de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat în limita oricărui segment pe direcția  $\xi_3$  a planului marginal  $\Gamma_{10}$ . Folosind relațiile deplasărilor termoelastice  $u_i(\xi)$  de la acțiunea unui gradient de temperatură, cu ajutorul formulei Duhamel-Neumann (4) pot fi calculate tensiunile termice  $\sigma_{ij}(\xi); i, j = 1, 2, 3$  pentru o problemă de limită particulară provenite de la acțiunea unui gradient de temperatură de orice valoare, aplicat în limita oricărui segment pe direcția  $\xi_3$  a planului marginal  $\Gamma_{10}$ . Fiind cunoscute expresiile analitice pot fi construite graficele acestor tensiuni termice.

#### Bibliografie

1. **Novacky V.** *Teoriya uprugosti.* Mir, Moskva, 1975.
2. **Șeremet V.** *Generalization of Green's formulae in thermoelasticity, Collection: Multiscale Green's Functions for Nanostructures, National Science Digital Library of USA, NSF, 4p, 2003.*
3. **Șeremet V.D.** *Handbook on Green's Functions and Matrices,* WIT Press, Southampton, 2003.
4. **Șeremet V.** *Thermoelastic Green's function, Print-Caro, Chișinău, 2014.*
5. **Șeremet V.D.** *The modification of Maysel's formula in the stationary thermoelasticity, Bulletin of Academy of Science of Republic of Moldova, Mathematics, 25 (3), pp. 19-22, 1997.*
6. **Nowacki W.** *Thermolasticity, International Series of monographs on Aeronautics and Astronautics, Division I: Solid and Structural Mechanics, Volume 3, Wroclawska Drukarnia Naokowa, Warszawa, 1962.*
7. **Crețu I.** *New influence functions for thermal displacements and stresses within half-space// Transilvanian Journal of Mathematics and Mechanics, Volume 8, Nr. 2, pag. 129-136, 2016.*