

Особенности обработки экспериментальных данных с помощью оконных функций

Т. Шестакова, Г. Сорокин, С. Грицков
Технический Университет Молдовы,
ger_sor@mail.ru

Аннотация - В работе рассмотрены принципы обработки экспериментальных данных с помощью различных оконных функций. Показано как правильно выбирать оконные функции исходя из динамического диапазона сигнала и размера выборки дискретного преобразования Фурье. Приведены структурная схема для реализации спектрального анализа сигнала и макетный образец устройства.

Ключевые слова - спектральный анализ, оконная функция, дискретное преобразование Фурье.

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для обработки экспериментальных данных и для их передачи по каналам связи широко используются цифровые методы. Однако при использовании цифровых методов необходимо учитывать ряд особенностей, которые присущи цифровым методам. Среди них выделим следующие:

- Ограничение длительности интервала выборки характером сигнала;
- Ограничение длительности интервала выборки поступающих данных вычислительными ресурсами;
- Ограниченная полоса пропускания выделенного канала связи.

II. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Как правило, при анализе экспериментальных данных используется не весь, а ограниченный во времени отрезок сигнала. Это накладывает определенные ограничения при спектральном анализе такого сигнала. Допустим, что имеется сигнал $s_0(t)$ который бесконечен во времени и изменяется по гармоническому закону. Как известно, преобразование Фурье этого сигнала будет представлять собой дельта-импульс на частоте сигнала, т.е. $S_0(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$. На практике расчет спектра сигнала производится в течение конечного интервала времени T . Таким образом мы получим сигнал $s(t)$, который совпадает с исходным на интервале времени T , а вне интервала равен нулю. Математически, сигнал $s(t)$ можно представить, как произведение исходного бесконечного сигнала $s_0(t)$ и прямоугольного видеоимпульса $w(t)$ длительностью T , т.е. $s(t) = s_0(t) \cdot w(t)$.

Спектр такого сигнала, на основании свойств преобразования Фурье будет равен свертке спектра исходного сигнала $S_0(\omega)$ и спектра $W(\omega)$ огибающей

импульса $w(t)$ [1, 3, 4]. В этом случае, на основании фильтрующего свойства дельта-функции спектр сигнала $s(t)$ равен:

$$S(\omega) = S_0(\omega) * W(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) * W(\omega) = W(\omega - \omega_0). \quad (1.1)$$

Спектр ограниченного во времени сигнала представлен на рис.1.1.

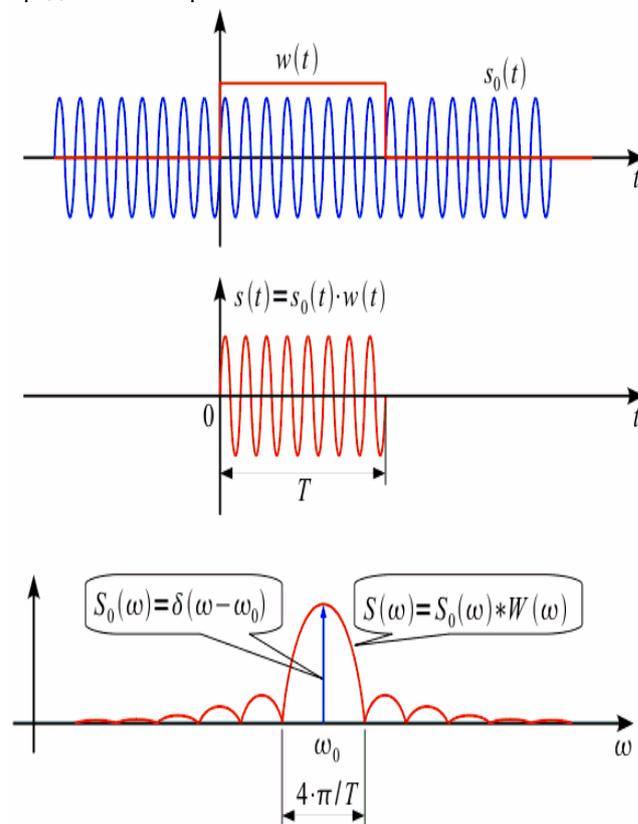


Рис.1.1. Спектр ограниченного во времени сигнала

Таким образом, вместо дельта-импульса спектр $S(\omega)$ превратился в функцию типа $\sin(x)/x$, (спектр прямоугольного импульса функции $w(t)$) причем

ширина лепестка зависит от длительности интервала анализа T (см. рис.1.2).

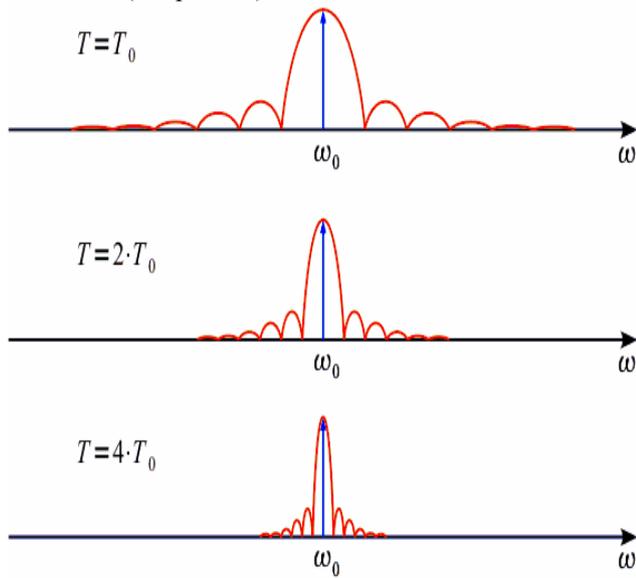


Рис.1.2. Изменение спектра сигнала с увеличением интервала анализа

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) ставит в соответствие N отсчетам сигнала $s(n)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$) N отсчетов спектра, взятых на одном периоде повторения спектра $S(k)$, где $k = 0, 1, \dots, N-1$. Отсчеты сигнала берутся через равные промежутки времени $\Delta t = 2 \cdot \pi / \omega_d$, где ω_d – частота дискретизации. Спектральные отсчеты берутся через интервал $\Delta \omega = 2 \cdot \pi / T$, где $T = N \cdot \Delta t = N \cdot 2 \cdot \pi / \omega_d$.

Пусть имеются два гармонических сигнала с частотами ω_0 и ω_1 , причем амплитуда второго сигнала много меньше амплитуды первого сигнала. Ограничение интервала анализа приведет к тому, что сигнал на частоте ω_1 будет не заметен под боковым лепестком первого сигнала, как это показано на рис.1.3.

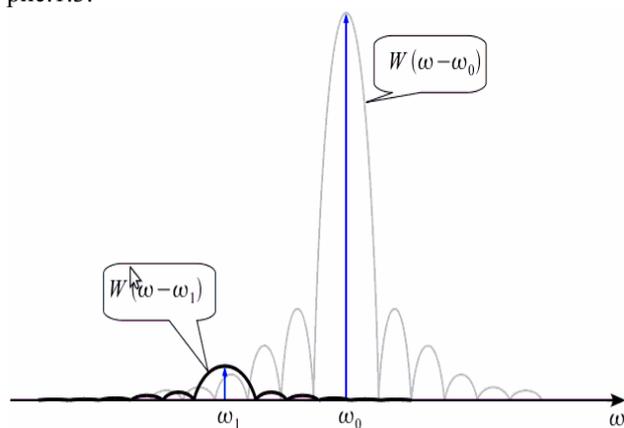


Рис.1.3. Спектр суммы двух сигналов с частотами ω_0 и ω_1

Следовательно, необходимо устранить боковые лепестки в спектре оконной функции, т.е. надо изменить оконную функцию $w(t)$ и сделать её более гладкой, как это показано на рис.1.4.

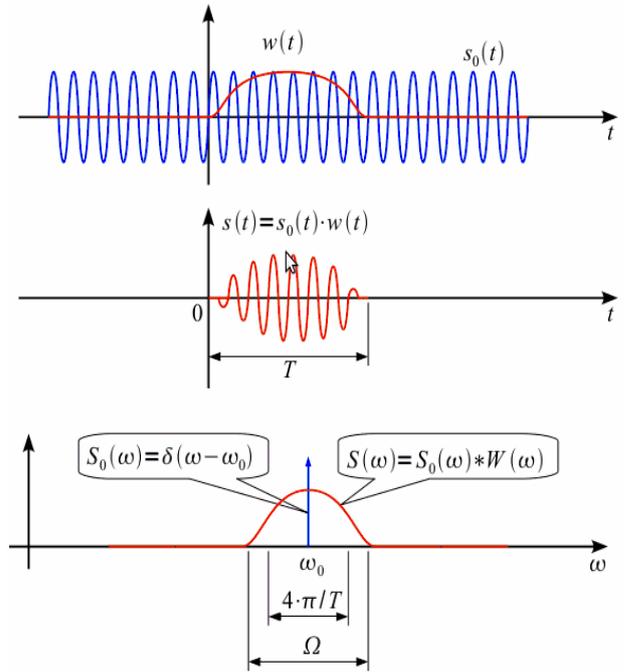


Рис.1.4. Спектр сигнала с гладкой весовой функцией

При гладкой весовой функции в спектре не наблюдаются боковые лепестки (или их уровень заметно уменьшается), однако имеет место расширения основного лепестка ($\Omega > 4 \cdot \pi / T$). Однако это свойство оконной функции позволяет выделить спектр слабого сигнала (Рис.1.5).

При диагностике подшипников качения основным информационным источником является вибросигнал, который анализируется в течение определенного интервала времени, когда подшипник вращается со стабильной нагрузкой и частотой вращения. В бездефектном подшипнике мощность сигнала не имеет периодических низкочастотных колебаний.

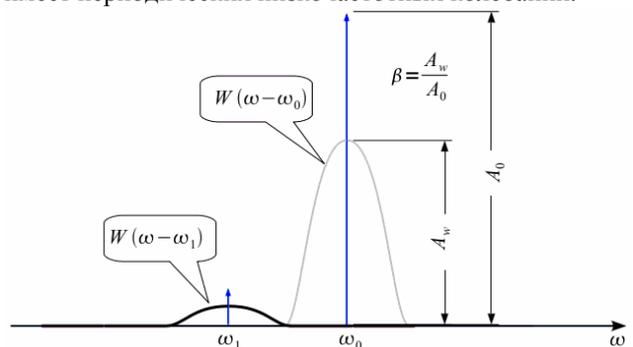


Рис.1.5. Спектр суммы двух сигналов при гладкой оконной функции

В дефектном подшипнике эти колебания достаточно сильны и хорошо выделяются в спектре огибающей в виде гармонических составляющих, имеющих подшипниковые (характерные) частоты или их комбинации, причем амплитуды этих гармоник могут сильно отличаться между собой. Это требует определенного подхода к выбору вида оконной функции.

Допустим, вибросигнал состоит из трех гармоник с разными частотами и амплитудами:

$$s(t) = A_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t) + A_1 \cdot \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cdot \cos(2\pi f_2 t), \quad (1.2)$$

где $A_0 = 1$ (0 дБ), $f_0 = 220$ Гц,
 $A_1 = 0,003$ (- 50,46 дБ), $f_1 = 240$ Гц,
 $A_2 = 10^{-4}$ (- 80 дБ), $f_2 = 230$ Гц .

Используя программу MatLab (интерактивная оболочка SPTool), выполним спектральный анализ, приведенного выше сигнала. Динамический диапазон сигнала составляет 80 дБ. Выберем частоту дискретизации $F_0 = 1$ кГц, выборка равна $N = 2^{10} = 1024$ отсчетам сигнала. Расстояние между спектральными отсчетами в этом случае равно:

$$\Delta f = F_0 / N = 1000/1024 \approx 0,977 \text{ Гц}. \quad (1.3)$$

Рассчитаем спектр исходного сигнала при использовании прямоугольного окна и окна Блэкмана – Наттала. Результаты спектрального анализа при использовании различных окон представлены на рис.1.6. и 1.7 соответственно.

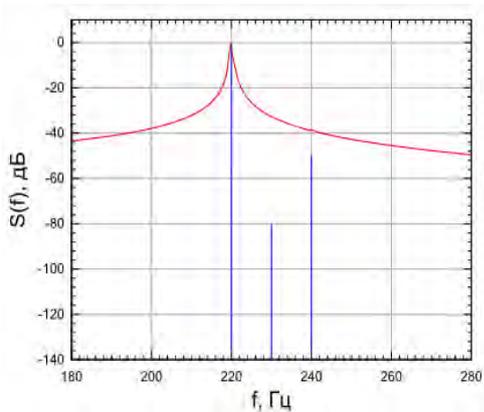


Рис.1.6. Спектр сигнала при использовании прямоугольного окна

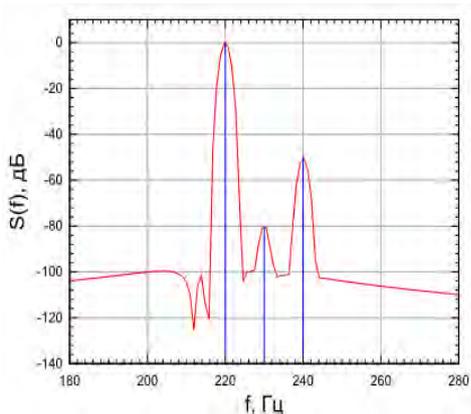


Рис.1.7. Спектр сигнала при использовании окна Блэкмана - Наттала

Без оконного сглаживания, ввиду очень высокого уровня боковых лепестков спектра прямоугольного окна (-13 дБ) в спектре обнаруживается только гармоника на частоте 220 Гц. Окно Блэкмана – Наттала, спектр которого имеет уровень боковых

лепестков – 98 дБ позволяет обнаружить все три спектральные составляющие сигнала.

В этом случае можно сформулировать правило выбора оконной функции исходя из требуемого динамического диапазона сигнала при его спектральном анализе. При спектральном анализе сигнала с известным или заданным динамическим диапазоном необходимо выбирать такую оконную функцию, уровень боковых лепестков спектра которой меньше заданного динамического диапазона. В противном случае некоторые спектральные составляющие сигнала могут быть не обнаружены. Так, например, если динамический диапазон сигнала не превышает 40 дБ, то целесообразно использовать окно Хемминга, боковые лепестки спектра которого не превышают - 42 дБ. Если же динамический диапазон сигнала не превышает 60 дБ, то можно использовать окно Блэкмана, уровень боковых лепестков которого не превышает - 58 дБ.

Если динамический диапазон сигнала неизвестен, то можно его оценить исходя из разрядности АЦП, который используется для дискретизации сигнала:

$$D = 20 \cdot \log_{10} 2^M = M \cdot 20 \cdot \log_{10} 2 = M \cdot 6,02 \text{ дБ}, \quad (1.4)$$

где D – динамический диапазон в децибелах, M – разрядность АЦП.

В случае 8 – битного АЦП динамический диапазон можно считать равным 48,16 дБ, а в случае 16 – битного – 96,32 дБ. Также можно априори оценить динамический диапазон исходя из типа обрабатываемого сигнала. Например, динамический диапазон аудиосигнала не превышает 40 дБ и при спектральном анализе аудиосигналов можно использовать окно Хемминга даже при 16 – битном квантовании.

Обобщим основные частотные характеристики спектра оконных функций, которые позволяют сравнивать между собой различные окна. Для этого рассмотрим нормированную амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) $W_n(F_n)$, оконной функции, представленную на рис.1.8.

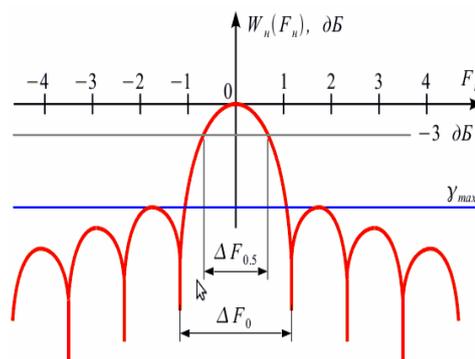


Рис.1.8. Нормированная АЧХ оконной функции

Нормирование амплитуды вводится для учета коэффициента ослабления β , так как $W_n(F_n) = W(F)/\beta$.

Коэффициентом ослабления β называют отношение постоянной составляющей A_w заданной функции окна, к постоянной составляющей прямоугольного окна A_{rect} :

$$\beta = \frac{A_w}{A_{rect}} = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) dt. \quad (1.5)$$

Смысл коэффициента ослабления заключается в том, что амплитуды всех спектральных составляющих после умножения на оконную функцию уменьшаются в β раз по сравнению с прямоугольным окном. Коэффициент ослабления выражают в логарифмической шкале:

$$\beta = 20 \cdot \log_{10}(\beta), \text{ дБ}. \quad (1.6)$$

В случае цифрового анализа имеется N отсчетов оконной функции $w(n)$, где $n = 0..N-1$, взятых через промежуток Δt . Тогда $T = N \cdot \Delta t$, а интеграл в выражении (1.5) следует заменить на сумму:

$$\beta = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \cdot \Delta t = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} w(n). \quad (1.7)$$

Для того, чтобы учесть коэффициент ослабления после ДПФ необходимо каждый спектральный отсчет поделить на β .

При введении коэффициента ослабления все АЧХ будут иметь максимум равный единице (0 дБ) на нулевой частоте. Так как, ширина главного лепестка АЧХ зависит от длительности окна во времени, то введем нормировку по частоте:

$$F_n = \frac{\omega}{2\pi/T} = \frac{\omega \cdot T}{2 \cdot \pi}. \quad (1.8)$$

Таким образом, форма нормированной АЧХ оконной функции не будет меняться при изменении длительности окна. Тогда можно ввести следующие нормированные параметры:

1. Нормированная ширина главного лепестка АЧХ по уровню 0,5 $\Delta F_{0,5}$ (-3дБ) определяется как нормированная полоса, при которой $W_n(F_n) > -3$ дБ.

2. Нормированная ширина главного лепестка АЧХ по нулевому уровню ΔF , которая равна $\Delta F_0 = \Omega \cdot T / (2 \cdot \pi)$.

3. Максимальный уровень боковых лепестков γ_{max} .

Можно заметить, что нормированная ширина ΔF_0 прямоугольного окна равна 2. Тогда можно ввести параметр, показывающий во сколько раз нормированная ширина главного лепестка АЧХ по нулевому уровню ΔF_0 заданного окна шире чем ΔF_0 прямоугольного окна. Обозначим этот параметр как $K = \Delta F_0 / 2$. В зависимости от параметра K окна делят на окна высокого разрешения ($K \leq 3$) и окна низкого разрешения ($K > 3$). Свойства некоторых оконных функций приведены в таб.№1.1.

В приведенном примере (рис.1.7. и рис.1.8.) гармоники сигнала отстоят друг от друга на 10 Гц. При этом использование оконного сглаживания приводит к ухудшению разрешения по частоте ввиду расширения главного лепестка спектра оконной функции. В нашем случае ширина главного лепестка спектра окна Блэкмана - Наттала составляет:

$$\Delta F = \Delta F_0 \cdot \Delta f = 8 \cdot 0,977 = 7,816 \text{ Гц},$$

где $\Delta F_0 = 8$, нормированная ширина главного лепестка спектра окна Блэкмана – Наттала по нулевому уровню (см. табл.№1.1).

Таблица №1.1. Нормированные параметры оконных функций

Наименование окна	ΔF_0	$\Delta F_{0,5}$	K	γ_{max} , дБ	β , дБ
Прямоугольное окно (rectangle window)	2	0,89	1	-13	0
Окно Барлетта (Bartlett window), или треугольное окно	4	1,33	2	-26,5	-6
Окно Ханна (Hann window)	4	1,5	2	-31,5	-6
Окно Хемминга (Hamming window)	4	1,33	2	-42	-5,37
Окно Блэкмана (Blackman window)	6	1,7	3	-58	-7,54
Окно Блэкмана — Харриса (Blackman–Harris window)	8	1,97	4	-92	-8,91
Окно Наттала (Nuttall window)	8	1,98	4	-93	-9
Окно Блэкмана — Наттала (Blackman–Nuttall window)	8	1,94	4	-98	-8,8
Окно Гаусса (Gaussian window) $\sigma = 0,5$	3,4	1,2	1,7	-31,5	-4,48
Окно Гаусса (Gaussian window) $\sigma = 1,2$	2,2	0,94	1,1	-15,5	-0,96

Использование оконного сглаживания приводит к ухудшению разрешения по частоте, т.е. ухудшает разрешающую способность спектрального анализа ввиду расширения главного лепестка оконной функции.

Если задано разрешение по частоте df , при котором требуется проанализировать спектр сигнала, то необходимо выполнить условие:

$$df > \Delta F_0 \cdot \Delta f = \Delta F_0 \cdot F_d / N, \quad (1.9)$$

где ΔF_0 – нормированная ширина главного лепестка спектра соответствующей оконной функции.

При заданном окне, которое выбирается исходя из динамического диапазона сигнала, $\Delta F_0 = const$ для обеспечения требуемого разрешения по частоте необходимо выполнение условия (1.9). При фиксированной частоте дискретизации $F_0 = const$ для увеличения разрешения по частоте необходимо увеличивать длину выборки N . Например, необходимо обеспечить разрешение по частоте $df = 2 \Gamma\text{ц}$, частота дискретизации $F_0 = 1 \kappa \Gamma\text{ц}$, сглаживание осуществляется при использовании окна Блэкмана - Наттала с $\Delta F_0 = 8$. Тогда из (1.9) получаем:

$$N > \Delta F_0 \cdot \frac{F_0}{df} = 8 \cdot \frac{10^3}{2} = 4000. \quad (1.10)$$

Таким образом, размер выборки для ДПФ должен составлять 4096 точек. Рассмотрим другой случай. Допустим, анализируемый сигнал состоит из трех спектральных составляющих:

$$s(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t) + A_3 \cos(2\pi f_3 t), \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_1 &= 1,0 \text{ (0 дБ)}, f_1 = 220 \text{ Гц}; \\ A_2 &= 1,0 \text{ (0 дБ)}, f_2 = 222 \text{ Гц}; \\ A_3 &= 10^{-4} \text{ (-80 дБ)}, f_3 = 220 \text{ Гц}. \end{aligned}$$

Динамический диапазон сигнала составляет 80 дБ, поэтому необходимо использовать окно Блэкмана-Наттала. Частоту дискретизации зададим равной $F_0 = 1 \kappa \Gamma\text{ц}$, требуемое разрешение по частоте $df = 2 \Gamma\text{ц}$, так как первая и вторая спектральные составляющие сигнала (1.11) отстоят друг от друга на $2 \Gamma\text{ц}$. Согласно (1.10) размер выборки БПФ должен составлять $N = 4096$ точек. На рисунках 1.9 и 1.10 показаны спектры сигнала при использовании окна Блэкмана — Наттала и различном размере выборки БПФ. Синим цветом показаны истинные спектральные составляющие сигнала (1.11).

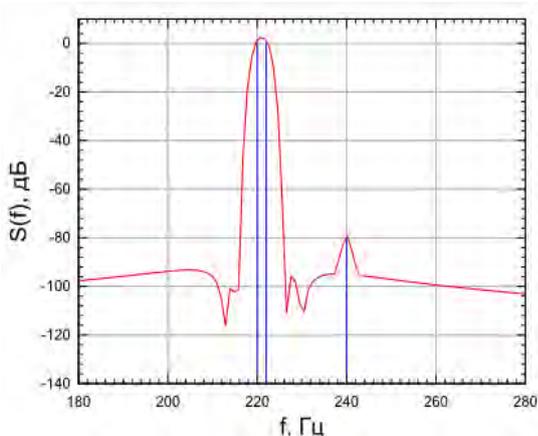


Рис. 1.9. Спектр сигнала при использовании окна Блэкмана – Наттала ($N = 1024$)

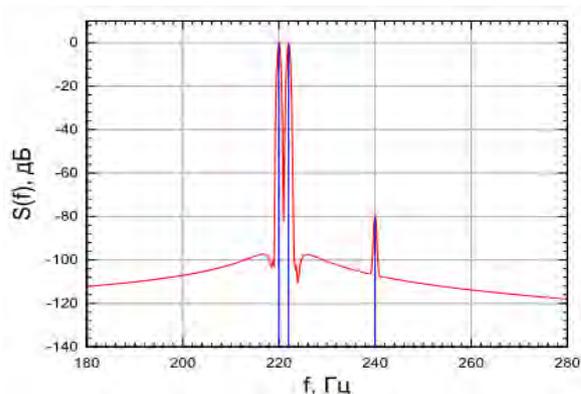


Рис. 1.10. Спектр сигнала при использовании окна Блэкмана – Наттала ($N = 4096$)

Из спектральных диаграмм видно, что при одинаковом динамическом диапазоне сигнала при использовании выборки $N = 1024$ окно Блэкмана – Наттала не позволяет различить спектральные составляющие на частотах 220 и 222 Гц, так как не выполняется условие (1.10). При $N = 4096$ условие (1.10) выполняется и все три спектральные составляющие в спектре сигнала различимы.

III. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

При практической реализации спектрального анализа с помощью дискретного преобразования Фурье применяют различные подходы [2]. В работе рассмотрен пример применения дискретного преобразования Фурье над конечными полями Галуа, рассмотренный в [5]. Структурная схема устройства для реализации преобразования Фурье, составленная на основе алгоритмов, описанных в [5], и макетный образец устройства, представлены на рис. 1.11 и рис. 1.12 соответственно.

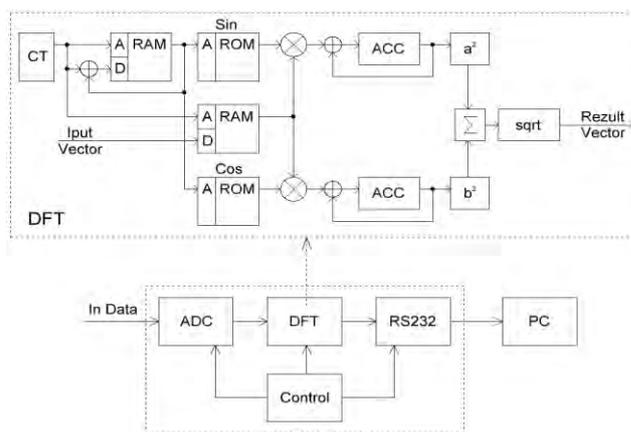


Рис. 1.11. Структурная схема устройства для реализации спектрального анализа ограниченного во времени сигнала

Принцип функционирования устройства преобразования Фурье (рис. 1.11) заключается в следующем. Входной сигнал, спектр которого анализируется, поступает на блок оцифровки “ADC”, оцифрованные данные поступают на блок “DFT”, который выполняет преобразование Фурье (структурная схема блока “DFT” изображена на рис. 1.11, а принцип работы изложен в [5]).



Рис.1.12. Макетный образец устройства для реализации спектрального анализа ограниченного во времени сигнала.

Полученный спектр на выходе блока “DFT” посредством модуля “RS232” передается на компьютер (модуль “PC”) для визуализации и обработки результатов анализа.

Устройство преобразования Фурье реализовано на основе kit “DE-2” фирмы Altera. Модуль “ADC” реализован на дополнительной плате, а все остальные модули (DFT, RS232, Control) реализованы на основе FPGA Cyclone II, входящей в состав kit “DE-2”. При реализации устройства преобразования Фурье было задействовано 642 логические ячейки (2% от общего количества) и 335900 бит памяти (69% от общего количества) FPGA Cyclone II. Данное устройство для реализации преобразования Фурье позволяет определять спектр сигнала до 4 кГц с шагом в 1 Гц.

Для отображения результатов преобразования Фурье на компьютере был спроектирован GUI (Graphical user interface) в среде Borland Delphi, представленный на рис. 1.13 и рис. 1.14.

В эксперименте синусоидальный сигнал частотой 3 кГц подавался на разработанное устройство преобразования Фурье (без учета оконной функции) и на осциллограф DS1052D (применяется преобразование Фурье с учетом оконной функции).

В первом случае (рис. 1.13) помимо основной гармоники с частотой в 3 кГц видны гармонические составляющие вплоть до 4 кГц (верхняя граница преобразования данного устройства), которых в спектре основного сигнала быть не должно. Во втором случае (рис. 1.14: результаты осциллографа DS1052D) отображается лишь основная гармоника с частотой в 3 кГц. Полученные результаты говорят о необходимости учета оконной функции при реализации преобразования Фурье.

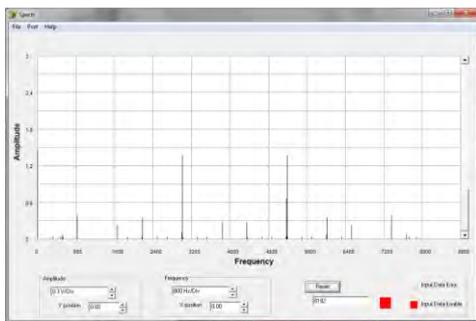


Рис.1.13. Результаты спектрального анализа анализируемого сигнала (без учета оконной функции)

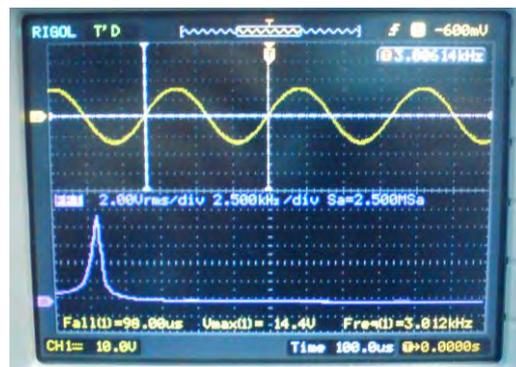


Рис.1.14. Результаты спектрального анализа анализируемого сигнала (с учетом оконной функции)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, был рассмотрен вопрос вычисления спектра сигнала при наблюдении на ограниченном временном отрезке. Показано, что ограничение времени анализа равносильно использованию прямоугольной оконной функции, частотная характеристика которой имеет максимальные боковые лепестки. Приведен механизм снижения уровня боковых лепестков путем сглаживания окном, что в свою очередь, ухудшает разрешение спектрального анализа из-за расширения основного лепестка.

Показано, что для качественного спектрального анализа необходимо выбрать такую оконную функцию, у которой уровень боковых лепестков спектра оконной функции меньше динамического диапазона сигнала. Размер выборки ДПФ необходимо выбирать исходя из требуемого разрешения по частоте на основании частоты дискретизации и свойств выбранной оконной функции. Результаты экспериментального анализа подтвердили результаты моделирования.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Хэррис Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. – ТИИЭР, т.66, №1, январь 1973. – сс.60-97.
- [2] Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ.- М.: Техносфера, 2006.- 856 с.
- [3] Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. -М.: Мир, 1990.
- [4] G. Andria, M. Savino, and A. Trotta, "Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy," I.EE Trans. Instrum Meas., vol. 38, pp. 856-863, 1989.
- [5] Г. Сорокин, Г. Бодян. Фурье-преобразование над конечными полями и его реализация на программируемых микросхемах. «Telecommunications, Electronics and Informatics» Inter.conferens. Vol.2. -Ch.: U.T.M., 2010, стр. 215÷226.