

CALCULUL PLĂCILOR CONSOLIDATE PE CONTUR CU GRINZI

Autor: Sergiu GALBINEAN

Conducător științific: dr. hab. prof. univ. Gheorghe MORARU

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: Se propune spre examinare o placă pătrată consolidată pe contur cu grinzi (fig.1). Placa este acționată de o sarcină uniform distribuită. Materialul plăcii și grinzilor este din beton armat. Se vor analiza valorile și distribuția eforturilor interioare în placă pentru diferite scheme de calcul:

1) încastrată pe toate laturile;

2) simplu rezemată pe toate laturile;

3) laturile plăcii sunt așezate pe legături elastice (arcuri) care exprimă numeric rigiditățile grinzii la încovoiere și torsiune. Eforturile interioare se vor determina numeric prin metoda elementelor finite.

Cuvinte cheie: placă, legături elastice, moment de încovoiere, moment de inerție sectorial, rigiditate la încovoiere, rigiditate la torsiune

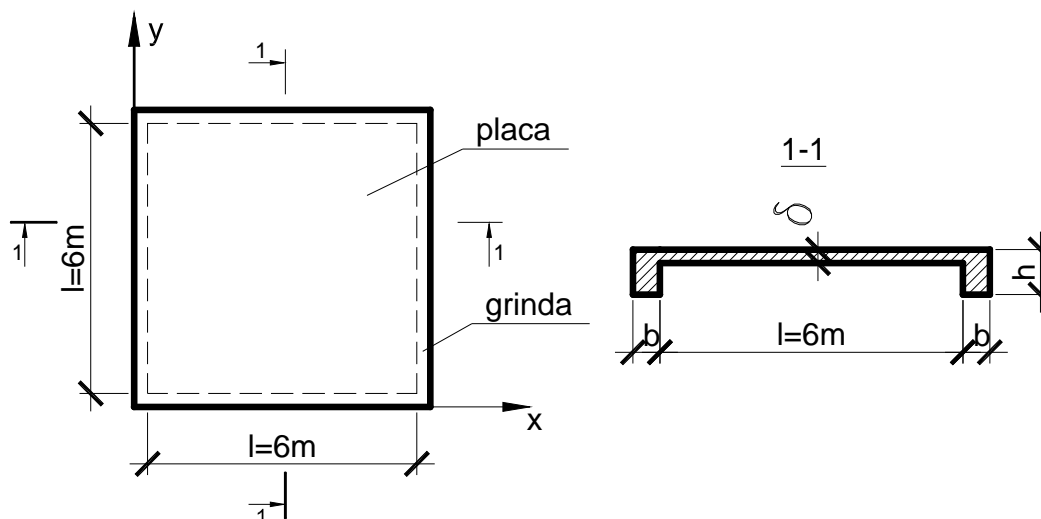


Fig. 1

Cel mai des în practică inginerii pentru acest tip de plăci folosesc ca schema de calcul laturile încastrate (absolut rigide) neglijând astfel deplasările provenite de la torsiunea și încovoierea grinzilor pe care reazemă placa. Acest lucru poate duce la idealizarea schemei de calcul și la o distribuție a tensiunilor diferită față de cea reală în deosebi pentru plăcile marginale unde torsiunea este mai pronunțată.

Pentru a lua în calcul influența deplasărilor provenite din deformația grinzii este necesar ca în fiecare nod de pe conturul plăcii să se aplice câte trei legături elastice (arcuri) egale ca valoare cu:

- rigiditatea grinzii la deplasarea de rotire (k_{φ}) provenită din torsiunea secțiunii grinzii acționată de un moment de torsiune unitar;
- rigiditatea grinzii la deplasarea verticală (k_y) provenită din încovoierea grinzii solicitate de o forță unitară;
- rigiditatea grinzii la deplasarea de rotire (k_{θ}) provenită din încovoierea grinzii solicitate de o forță unitară.

Deoarece toți acești trei parametri sînt funcții de x , pentru ai determina se vor folosi funcții de influență (funcțiile Green).

În stadiul elastic de comportare a materialului există relația:

$$M_t = k_{\varphi} \cdot \varphi(x) \quad (1)$$

unde: φ - unghiul de rotire a secțiunii barei la torsiune;

M_t - momentul de torsiune.

Pentru un moment de torsiune unitar $M_t = 1$ rigiditatea la torsiune va fi:

$$k_\varphi = \frac{1}{\varphi(x)} \quad (2)$$

Unghiul φ se va determina din funcția de influență pentru o bară încastată la ambele capete acționată de un moment de torsiune unitar (fig.2) luând în considerație deplanarea împiedicată a secțiunii.

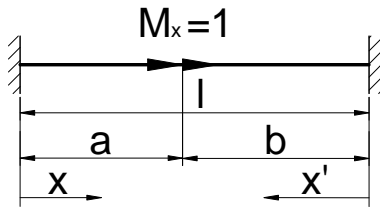


Fig.2

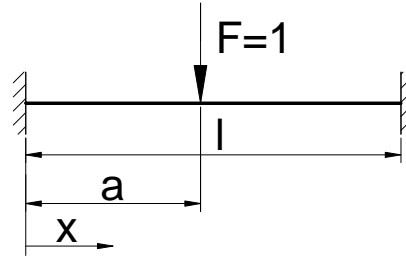


Fig.3

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_\omega \cdot k^3} \left[\frac{\lambda_2 x + (ka + \lambda_1) x'}{l} - \frac{\lambda_2 \sinh kx + (\sinh ka + \lambda_1) \sinh kx'}{\sinh kl} \right] \quad (3)$$

unde:
$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{\sinh ka + \sinh kb}{\sinh kl} - 1}{2 \tanh k \frac{l}{2}} \pm \frac{\left(\frac{a-b}{l} - \frac{\sinh ka - \sinh kb}{\sinh kl} \right) \frac{l}{2} \tanh k \frac{l}{2}}{l - \frac{2}{k} \tanh k \frac{l}{2}}$$

$$k = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}}$$
 - este caracteristica de încovoiere-răsucire a barei;

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$
 - modulul transversal de elasticitate; μ - coeficientul lui Poisson;

I_t - momentul de torsiune a barei; I_ω - momentul de inerție sectorial a barei.

Folosind principiile de mai sus putem scrie:

$$F = k_v \cdot v(x) \quad \text{și} \quad F = k_\theta \cdot \theta(x) \quad (4)$$

Pentru o forță unitară concentrată $F=1$, rigiditatea verticală k_v și cea unghiulară k_θ la încovoiere vor fi:

$$k_v = \frac{1}{v(x)}; \quad k_\theta = \frac{1}{\theta(x)} \quad (5)$$

unde: v - deplasarea verticală a barei la încovoiere;
 θ - unghiul de rotire a secțiunii la încovoiere.

Deplasarea verticală v se va determina cu funcția de influență pentru o bară încastată la ambele capete sollicitată de o forță unitară concentrată

$$v(x) = \frac{1}{6EI \cdot l^3} \cdot x^2 (a-l)^2 \cdot (3la - 2xa - lx) \quad (6)$$

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} \quad (7)$$

Remarcă: În expresiile (3) și (6) valoarea lui x se va înlocui cu a , iar x' cu $l - a$

Utilizând expresiile pentru rigiditățile k_ϕ , k_v și k_θ s-au calculat valorile lor în fiecare nod de pe conturul plăcii discretizate, pentru diferite raporturi ale EI/D , unde $D = \frac{E \cdot \delta^3}{12(1 - \mu^2)}$ reprezintă rigiditatea

cilindrică a plăcii la încovoiere. În continuare, folosind metoda elementelor finite (MEF) s-au calculat momentele de încovoiere în placa cercetată, discretizată în 12x12 elemente finite. Dimensiunea plăcii este de 6x6 m și grosimea $\delta=15$ cm. Materialul plăcii și grinzilor – beton-armat clasa C15 cu modulul de elasticitate $E=2,31 \cdot 10^7$ kN/m² și coeficientul lui Poisson $\mu=0,2$. Placa este acționată de o sarcină uniform distribuită $p=10$ kN/m².

Rezultatele s-au înscris în tabelul 1 și s-au comparat cu cele analitice obținute pentru placa încastrată pe contur și pentru placa simplu rezemată.

Tabelul 1

Momentele maxime în placă	Rezultatele analitice		Rezultatele obținute prin MEF pentru placa cu trei legături elastice (arcuri) în nod, pentru diferite raporturi ale EI/D				
	Placa încastrată pe contur	Placa simplu rezemată	$\frac{EI}{D} = 1$	$\frac{EI}{D} = 8$	$\frac{EI}{D} = 16$	$\frac{EI}{D} = 32$	$\frac{EI}{D} = 64$
La centru M_{x1} [kNm/m]	7,606	15,890	10,691	9,162	8,428	8,235	8,073
La reazeme M_{x2} [kNm/m]	-18,557	-	-10,159	-13,559	-15,707	-16,387	-16,830

Distribuția momentelor de încovoiere M_x în placă pe secțiunea centrală și devierea față de schema perfect încastrată (%)

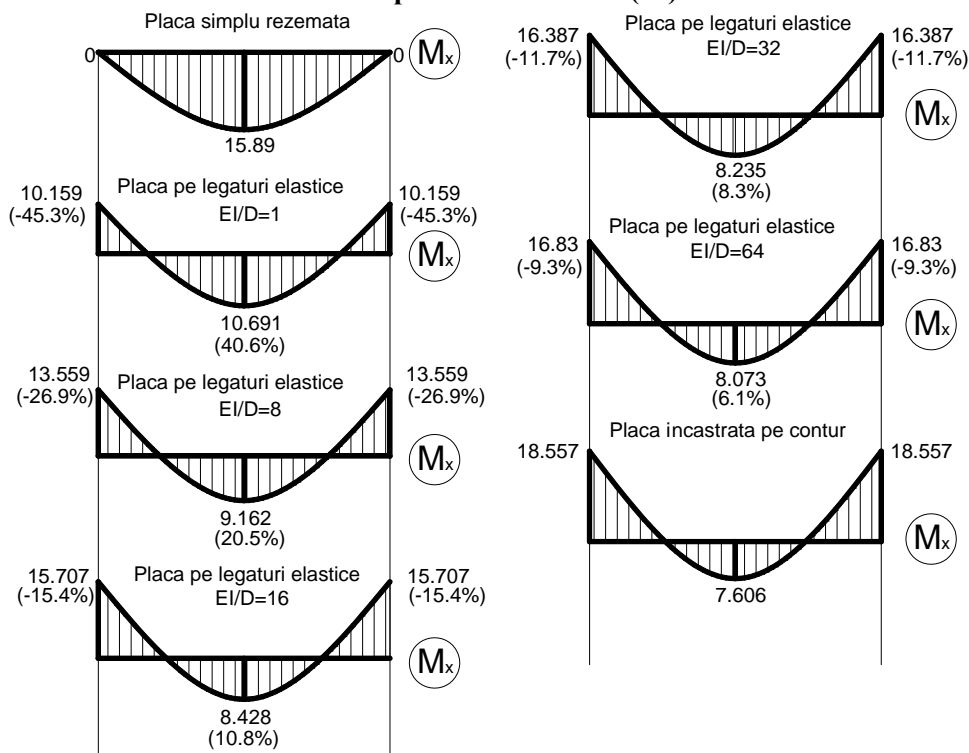


Fig. 4

Caracterul creșterii momentului încovoietor la reazeme în funcție de raportul

rigidității grinzii și plăcii

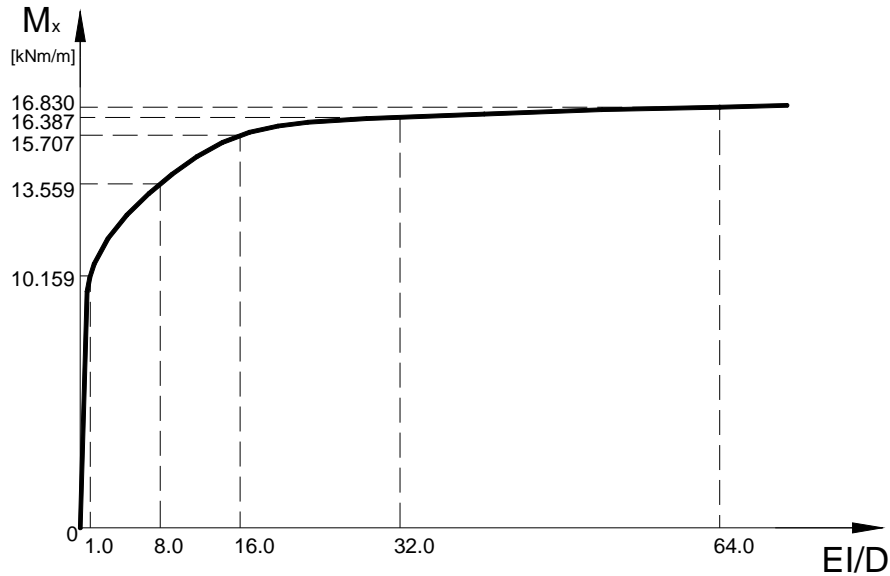


Fig. 5

Concluzii:

În urma studiului efectuat se observă că grinda are o influență importantă la calculul eforturilor pentru majoritatea plăcilor rezemate pe grinzi și în special pentru plăcile marginale unde torsiunea are un efect semnificativ. Eforturile obținute pentru schema de calcul a plăcii așezate pe legături elastice se deosebesc cu mult față de schema plăcii încastrate. Numai la o valoare semnificativă a raportului EI/D relația devine liniară (fig.5), iar eforturile cresc lent tinzând la schema de calcul a plăcii încastrate. Deci este indicat de folosit schema de calcul a plăcii așezate pe legături elastice. Folosirea schemei de calcul a plăcii încastrate poate duce la o distribuție diferită a tensiunilor față de cea reală și respectiv la o armare incorectă pentru plăcile din beton armat. Schema de calcul a plăcii încastrate pe contur se recomandă de folosit pentru grinzi cu rigiditate mare în comparație cu rigiditatea cilindrică a plăcii.

Bibliografie

1. A. Caracostea *Manual pentru calculul construcțiilor*, București, 1977.
2. S. Timoshenko, și S. Woinowski-Krieger *Teoria plăcilor plane și curbe*, București, 1968
3. A. З. Власов *Тонкостенные упругие стержни*, Москва, 1938.
4. A. А. Уманский *Справочник проектировщика*, Москва, 1972.
5. N.M. Beliaev, *Rezistența materialelor*, vol. I și II (trad. din rusă), București, 1956