FACTORIZAREA FUNCTORILOR REFLECTORI

Alina ȚURCANU

Rezumat: Se examinează problema descompunerii unui functor reflector ca compoziție a doi functori reflectori de anumit tip. Se studiază existența unor astfel de descompuneri.

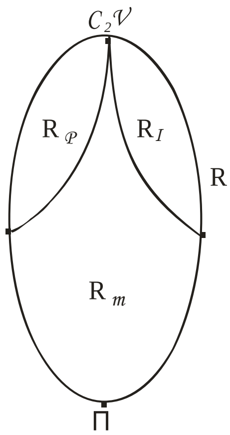
Cuvinte cheie: Spații local convexe, subcategorii reflective, latice.

1.1. Orice structură bicategorială $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ a spațiilor local convexe topologice vectoriale Hausdorff, împarte laticea R a subcategoriilor reflective nenule în trei clase (a se vedea [B], [Ț]):

$\mathrm{R}_{\mathcal{P}}$ – clasa subcategoriilor $\mathcal{P}$ – reflective;

$\mathrm{R}_{\mathcal{I}}$ – clasa subcategoriilor $\mathcal{I}$ – reflective;

$\mathrm{R}_m = (\mathrm{R} \setminus (\mathrm{R}_{\mathcal{P}} \cup \mathrm{R}_{\mathcal{I}})) \cup \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}$.



Fie $\mathcal{L}$ un element arbitrar al clasei R_m. Pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ fie $l^X \colon X \to lX$ $\mathcal{L}$ – replica lui, iar

$$l^X = i^X p^X \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p^X"] \arrow[rr, bend right, "l^X"'] & bX \arrow[r, "i^X"] & lX \end{tikzcd}$$

$(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ – factorizarea morfismului respectiv.

Notăm cu $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{L})$ subcategoria plină a categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ formată din toate obiectele izomorfe cu obiectele bX când $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$. Subcategoria $\mathcal{B}$ este $\mathcal{P}$ – reflectivă, iar $b^X \colon X \to bX$ este $\mathcal{B}$ – replica obiectului X ([T]).

Fie $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}''(\mathcal{L})$ subcategoria plină a tuturor obiectelor A cu proprietatea: pentru orice obiect X al categoriei $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ orice morfism

$f \colon bX \to A$ se extinde prin morfismul i^X:

$$f = g\, i^X$$

pentru un careva morfism g.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p^X"] & bX \arrow[r, "i^X"] \arrow[d, "f"'] & lX \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Subcategoria $\mathcal{A}''$ este închisă în raport cu produse şi

$\mathcal{M}_f$ - subobiecte. Deci ea este reflectivă, iar $i^X: bX \to lX$ este $\mathcal{A}''$ – replica obiectului bX.

1.2. Teoremă. 1.$\mathcal{B}$ *este o subcategorie* $\mathcal{P}$*– reflectivă* a *categoriei* $C_2\mathcal{V}$.

2. $\mathcal{A}''$ *este o subcategorie reflectivă categoriei* $C_2\mathcal{V}$.

3. $\mathcal{L}$*– replica şi* $\mathcal{A}''$*– replica obiectelor din subcategoria* $\mathcal{B}$ *coincid.*

4. *Functorii reflectori ai subcategoriilor* $\mathcal{L}$, $\mathcal{B}$ *şi* $\mathcal{A}''$ *sunt în relaţia:*

$$l = a'' b$$

1.3. Teoremă: *Fie* $\mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{T}$*– două subcategorii reflective ale categoriei* $C_2\mathcal{V}$ *astfel încât* $\mathcal{R}$ *este* $\mathcal{P}$*– reflectivă,* $\mathcal{T}$*– replica oricărui obiect din* $\mathcal{R}$ *aparţine clasei* $\mathcal{I}$*. Mai departe, fie că functorii reflectori ai subcategoriilor* $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{T}$ *sunt în relaţia*:

$$l = t\, r$$

Atunci

$$\mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{L}).$$

Demonstraţie. Fie $r^X: X \to rX$ $\mathcal{R}$– replica obiectului X, iar $t^X: rX \to lX$ - $\mathcal{T}$– replica obiectului rX. Cu notaţiile de mai sus avem următoarea diagramă comutativă:

$$\begin{tikzcd}
 & bX \arrow[rd, "i^X"] \arrow[dd, dashed, "f"] & \\
X \arrow[ru, "b^X"] \arrow[rr, "l^X"] \arrow[rd, "r^X"'] & & lX \\
 & rX \arrow[ru, "t^X"'] &
\end{tikzcd}$$

Astfel

$$l^X = i^X b^X \qquad (1)$$

şi

$$l^X = t^X r^X \qquad (2)$$

sunt două $(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ – descompuneri ale morfismului l^X. Există atunci un isomorfism $f: b^X \to r^X$ astfel încât

$$f\, b^X = r^X \qquad (3)$$

$$t^X f = i^X. \qquad (4)$$

Aşadar $\mathcal{R} = \mathcal{B}$.

1.4. Pornind de la teorema precedentă vom nota:

- $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ – clasa tuturor subcategoriilor $\mathcal{I}$– reflective Γ functorul reflector al cărora verifică relaţia:

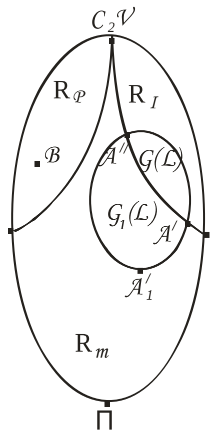
$$l = g\, b$$

- $\mathcal{G}_1(\mathcal{L})$ – clasa tuturor subcategoriilor reflective Γ pentru care

$$l = g\, b$$

şi Γ - replica oricărui obiect al subcategoriei $\mathcal{B}$ aparţine clasei $\mathcal{I}$.

Conform celor menţionate mai sus $\mathcal{A}'' \in \mathcal{G}_1(\mathcal{L})$, iar $\mathcal{G}(\mathcal{L}) = \mathrm{R}_{\mathcal{I}} \cap \mathcal{G}_1(\mathcal{L})$. Nu se exclude cazul ca clasa $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ să fie vidă. Teorema 3.2 [T] indică condiţii destul de dure când $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ este o sublatice a laticei $\mathrm{R}_{\mathcal{I}}$. După cum rezultă din următorul rezultat $\mathcal{G}_1(\mathcal{L})$ este de asemenea o latice completă, dar în laticea R.



1.5. Teoremă: *Pentru orice element* $\mathcal{L} \in \mathrm{R}_m$ *există un element* $\mathcal{A}_1' = \mathcal{A}_1'(\mathcal{L}) \in \mathrm{R}$ *astfel încât*

$$\mathcal{G}_1(\mathcal{L}) = \{\mathcal{R} \in \mathrm{R} \mid \mathcal{A}_1' \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{A}''\}.$$

Demonstrație. Elementul maximal $\mathcal{A}''$ al clasei $\mathcal{G}_1(\mathcal{L})$ a fost construit anterior. Astfel clasa $\mathcal{G}_1(\mathcal{L})$ nu este vidă. Stabilim

$$\mathcal{A}_1' = \cap \{\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \in \mathcal{G}_1(\mathcal{L})\}.$$

Deoarece $\mathcal{A}_1'$ este închisă în raport cu produsele şi $\mathcal{M}_f$ - subobiecte rezultă că $\mathcal{A}_1'$ este subcategorie reflectivă. Reieşind din faptul cum se construieşte minimul unei clase de subcategorii reflective (a se vedea [BBC]), deducem că $\mathcal{A}_1'$ - replica oricărui obiect bX este de asemenea i^X. Astfel $\mathcal{A}_1' \in \mathcal{G}_1(\mathcal{L})$.

1.6. Teoremă: *Fie* $\mathcal{R} \in \mathrm{R}_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{L} \in \mathrm{R}_m$ *şi* $\Gamma \in \mathcal{G}_1(\mathcal{L})$. *Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $l = g\, r$.
2. $g(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ *şi* $\mathcal{L} = \mathcal{R} \cap \Gamma$.
3. $\mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{L})$ *şi* $\Gamma \in \mathcal{G}_1(\mathcal{L})$.

Demonstrație. 1 $\Rightarrow$ 2. Fie X un obiect al categoriei $C_2\mathcal{V}$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "r^X"] \arrow[rr, bend right, "l^X"'] & rX \arrow[r, "g^{rX}"] & grX \end{tikzcd}$$

r^X, g^{rX} şi l^X replicile obiectelor respective. Din egalitatea $l = g\, r$ rezultă că

$$l^X = g^{rX}\, r^X$$

Din aceeaşi egalitate $l = g\, r$ rezultă că $g\, r\, X \in |\mathcal{L}|$. Ținînd cont de faptul că $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$, conchidem că $g(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. Astfel $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$ şi evident $\mathcal{L} \subset \Gamma$. Deci $\mathcal{L} \subset \mathcal{R} \cap \Gamma$.

Incluziunea inversă rezultă din aceeaşi egalitate $l = gr$.

2$\Rightarrow$3. Fie $r^X\colon X \to rX$ şi $g^{rX}\colon rX \to g\, r\, X$ $\mathcal{R}$– şi Γ- replica obiectelor respective. Din faptul că $g(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ rezultă că $g\, r\, X \in |\mathcal{R} \cap \Gamma| = |\mathcal{L}|$. Deci $g^{rX} r^X$ este $\mathcal{L}$ – replica obiectului X:

$$l^X = g^{rX}\, r^X$$

Conform teoremei 3 deducem că $\mathcal{R} = \mathcal{B}(\mathcal{L})$.

3 $\Rightarrow$ 1. Evident.

2. Concluzii

2.1. În lucrarea [B] este examinată divizarea clasei R după structura bicategorială ($\mathcal{E}_u$, $\mathcal{M}_p$). În acest caz pentru orice element $\mathcal{L} \in \mathrm{R}_m$ clasa $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ este o latice completă cu prim şi ultim element.

2.2. În lucrarea [Ţ] este studiată divizarea laticei R pentru o structură bicategorială arbitrară ($\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$).

Se examineaza următoarea condiție pentru ($\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$):

A) ($\mathcal{I} \cap \mathcal{E}pi$, $(\mathcal{I} \cap \mathcal{E}pi)^{\perp}$) este o structură bicategorială de dreapta în categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$.

În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există o clasă proprie de structuri bicategoriale care verifică condiția A) (a se vedea [BTC]). Structura bicategorială ($\mathcal{E}_u$, $\mathcal{M}_p$) verifică această condiție.

Dacă structura bicategorială ($\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$) verifică condiția A), atunci $\mathcal{G}(\mathcal{L})$ este o latice completă cu prim şi ultim element ([Ţ] , teorema 3.2).

2.3. În categoria $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ există structuri bicategoriale ($\mathcal{P}$, $\mathcal{I}$) care verifică condiția duală A^0). Însă cele cunoscute autorului efectuează o divizare trivială a laticei K a subcategoriilor coreflective nenule. De exemplu, structura bicategorială ($\mathcal{E}_u$, $\mathcal{M}_p$) verifică condiția A^0), iar divizarea este următoarea:

$$\mathrm{K}_{\mathcal{E}u} = \mathrm{K},\ \mathrm{K}_{\mathcal{M}p} = \mathrm{K}_m = \{\mathcal{C}_2\mathcal{V}\}.$$

2.4. Asocierea subcategoriei reflective $\mathcal{L} \in \mathrm{R}_m$ a laticei $\mathcal{G}_1(\mathcal{L})$ este posibilă oricând. Astfel şi construcția duală poate fi efectuată.

Bibliografie

[B] Botnaru D., The composition and commutativity of reflector functors, Functs. Analiz., Ulianovsk, v.21, 1983, p. 59-71 (in russian).

[BBC] Botnaru D., Baeş E., Cerbu O., Operații în clasa subcategoriilor reflective (la redacție).

[BTC] Botnaru D., Țurcanu A., Cerbu O., Bicategory structures generated by injective spaces, ROMAI Jurnal (la redacție).

[T] Țurcanu A., The factorization of the reflector functors, Buletinul Institutului Politehnic din Iaşi, Tom. LIII, Fasc. 5, Iaşi, 2007, p. 377-391.