O TEOREMĂ CARE DUCE LA LIMITĂ (PROPRIETATEA DE CONTENUITATE A PROBABILITĂȚII). O DEFINIȚIE ALTERNATIVĂ A PROBABILITĂȚII.

Autor: ***Pavel CIUMAC***

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *În virtutea axiomei P4 s-a demonstrat teorema şi s-a dovedit că proprietățile P4 şi P4* pot să alterneze în teoria probabilităților ca axiome.*

Cuvinte cheie: *axiomă, probabilitate, continuitate.*

Fie F un câmp de evenimente. Pentru a stabili o măsură a posibilităților de realizare a evenimentelor avem următoarea

Definiție. O funcție numerică P, definită pe F cu valori în R este o probabilitate dacă satisface următoarele axiome:

P1. $P(A) \geq 0$ pentru orice $A \in \mathsf{F}$;

P2. $P(\Omega) = 1$;

P3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pentru orice $A, B \in \mathsf{F}$ incompatibile;

(axioma aditivității finite).

Pentru rezolvarea problemelor cu şiruri infinite de evenimente, se cere de a completa această definiție cu axioma aditivității complete. Nu este suficient să postulăm proprietatea P3 pentru a deduce aditivitatea completă.

P4. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ pentru orice şir $A_1, A_2, ... \in \mathsf{F}$ cu $A_1 \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$ (axioma aditivității complete).

Probabilitatea care satisface axioma P4 se numeşte probabilitate complet aditivă sau σ -aditivă. Un câmp de evenimente pe care s-a definit o probabilitate se numeşte câmp de probabilitate şi îl vom nota (Ω, F, P). El constituie temelia pe care se construieşte teoria probabilităților.

Şirul de evenimente $A_n \in \mathsf{F}$ se numeşte ascendent dacă

$$A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$$

şi descendent dacă

$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ....$$

Fie că (A_n) este un şir ascendent de evenimente; definim un nou eveniment pe care îl notăm $\lim_{n\to\infty} A_n$:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\to\infty}^{\infty} A_i.$$

Iar dacă şirul (A_n) este descendent atunci $\lim_{n\to\infty} A_n$ este definită astfel

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Teoremă. Fie că şirul de evenimente este ascendent sau descendent, atunci

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{1}$$

Demonstraţie. Fie că şirul de evenimente (A_n) este ascendent. Acestui şir îi asociem şirul (B_n) de evenimente construit în felul următor: $B_i = A_i - A_{i-1}$; $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1$, $B_3 = A_3 - A_2$, … observăm că şirul (B_n) posedă următoarele proprietăţi:

$$B_i \subset A_i,\ B_i \cap B_j = \varnothing \text{ pentru } i \neq j \text{ şi } \bigcup_{i=1}^{n} B_i = A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ pentru toţi } n \geq 1\ \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} A_n .$$

În virtutea axiomei aditivităţii complete P4 obţinem:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Teorema este demonstrată pentru ambele cazuri. Această teoremă este numită proprietatea de continuitate a probabilităţii.

Din teorema demonstrată rezultă proprietatea

P4*. Dacă (A_n) este un şir descendent de evenimente din $\mathcal{F}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \varnothing$, atunci

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0 .$$

Asta înseamnă că probabilitatea P este continuă în $\varnothing$.

Acum demonstrăm că din proprietatea P4* rezultă proprietatea P4.

Fie (A_n) un şir de evenimente din $\mathcal{F}$ care sunt incompatibile două câte două, adică $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$

şi $$E_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i ,$$

atunci

$$E_n \supset E_{n+1} \text{ şi } \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing .$$

Este evident că

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup E_n .$$

Conform aditivităţii finite avem

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(E_n).$$

Deoarece pentru $n \to \infty$, $P(E_n) \to 0$ urmează că

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \lim_{n\to\infty} P(E_n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Ultima egalitate rezultă din P4'.

În virtutea proprietăţii P4 s-a demonstrat teorema, din teoremă imediat rezultă proprietatea P4*, iar din P4* rezultă P4. Aşadar avem P4 $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ P4* $\Rightarrow$ P4. deci putem spune că proprietatea P4 şi proprietatea P4* sunt echivalente (P4 $\Leftrightarrow$ P4*). Dacă în definiţia probabilităţii înlocuim proprietatea aditivităţii complete P4 cu proprietatea de continuitatea P4* obţinem o definiţie alternativă a probabilităţii, în care P4* este considerată axiomă iar P4 – teoremă.

Definiţia alternativă. Se numeşte probabilitate o funcţie p definită pe $\mathcal{F}$, cu valori reale care satisface condiţiile:

P1. $P(A) \geq 0$ pentru orice $A \in \mathcal{F}$;

P2. $P(\Omega) = 1$;

P3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dacă $A, B \in \mathcal{F}$ şi $A \cap B = \varnothing$;

P4*. Pentru orice şir $(A_n) \in \mathcal{F}$ descendent

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$$

cu $\lim_{n\to\infty} A_n \to \varnothing$, avem $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Bibliografie

7. A.A. Borovkov, *Teoria veroiatnostei*, -M.: nauca, 1986;
8. I.I. Ghihman, A.V. Skorohod, M.I. Iadrenko, *Teoria veroiatnostei i matematiceskaia statistica*. – K.:Vîsşaea Şcola, Golovnoe izd-vo, 1988.