THÉORÈME D'UNICITÉ DANS LA THÉORIE DE LA VISCOÉLASTICITÉ LINÉAIRE AVEC MICROSTRUCTURE EN UTILISANT LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

M. Ispas, D. Manole
Technical University „Gh.Asachi" of Iassy

INTRODUCTION

Un théorème d'unicité dans la théorie de la viscoélasticité linéaire se trouve dans [3]. Dans la théorie de la viscoélasticité linéaire micropolaire est donné un tel théorème dans [2]. Par la suite, on va donner un théorème unicité dans la théorie de la viscoélasticité linéaire avec microstructure en utilisant la transformation de Laplace. La transformation de Laplace a été utilisée dans [5] afin d'obtenir des théorèmes de réciprocité pour des milieux élastiques and thermo-élasticité.

1. ÉQUATIONS DE BASE

Soit un milieu viscoélastique avec microstructure qui occupe le domaine (Ω) de l'espace euclidien tridimensionnel, dont la fermeture est $\overline{\Omega}$ et la frontière (régulière) est (Σ).

Les équations de la théorie linéaire des milieux viscoélastiques avec microstructure sont [4] les équations de mouvement:

$$\begin{cases} \left(\tau_{ij}+\sigma_{ji}\right)_{,j}+f_i=\rho\ddot{u}_i \quad , \\ \mu_{kij,k}+\sigma_{ij}+l_{ij}=I_{is}\cdot\ddot{\Psi}_{sj}\ ;\ \tau_{ij}=\tau_{ij} \end{cases} \tag{1}$$

les équations géométriques:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right) \\ \gamma_{ij}=u_{j,i}-\psi_{ij}\ , \qquad ; \\ \chi_{ijk}=\psi_{jk,i} \end{cases} \tag{2}$$

les équations constitutives :

$$\begin{cases} \tau_{ij}=2\cdot\varepsilon_{kn}*dA_{ijkn}+(\gamma_{kn}-\varepsilon_{kn})*dC_{ijkn}, \\ \sigma_{ij}=\gamma_{kn}*dB_{ijkn}+(\varepsilon_{kn}-\gamma_{kn})*dC_{ijkn}, \\ \mu_{ijk}=\chi_{mnp}*dL_{ijkmnp} \quad . \end{cases} \tag{3}$$

Dans ces relations on a utilisé les notations:
u_i – composantes du vecteur déplacement;
ψ_{ij} – composantes du tenseur microdéplacement;
ε_{ij} – composantes du tenseur macrodéformation;
γ_{ij} – composantes du tenseur déformation relative;
χ_{ijk} – composantes de la microdéformation;
f_i – composantes du vecteur force massique;
l_{ij} – composantes du tenseur microforce massique;
τ_{ij} – composantes du tenseur tension;
σ_{ij} – composantes du tenseur tension relatif,
μ_{ijk} – composantes du tenseur microtension;
ρ(x), $I_{ij}(x,t)$, $A_{ijkn}(x,t)$, $B_{ijkn}(x,t)$, $C_{ijkn}(x,t)$, $L_{ijkmnp}(x,t)$ - sont des fonctions qui caractérisent le matériel, la virgule désigne la dérivée partielle en rapport du temps, * est le produit de convolution.

Les fonctions qui caractérisent le matériel satisfont:

$$\begin{cases} A_{ijkn}=A_{jikn}=A_{knij}\ , C_{ijkn}=C_{jikn}=C_{knij}\ , \\ B_{ijkn}=B_{knij}\ , \quad L_{ijkmnp}=L_{mnpijk} \quad , \quad ; \\ I_{ij}(x)=I_{ji}(x)\ , I_{jk}\cdot\eta_{ij}\cdot\eta_{ik}\geq I\cdot\eta_{ij}\cdot\mu_{ij}\ , \\ (\forall)\eta_{ij}>0m, \mathrm{I}=const.>0, \\ \rho(x)\geq\rho_0>0,\ sur\ (\bar{\Omega})X(-\infty,+\infty) \end{cases} \tag{4}$$

Par la suite on va supposer que:

$$u_i(x,t)=\psi_{ij}(x,t)=0,\ sur\ (\bar{\Omega})_X\left(-\infty,0\right), \tag{5}$$

d'où il résulte que:

$$\varepsilon_{ij}(x,t)=\gamma_{ij}(x,t)=\chi_{ijk}(x,t)=\tau_{ij}(x,t)=$$
$$=\sigma_{ij}(x,t)=\mu_{ijk}(x,t)\ ,\ sur\ (\bar{\Omega})_X\left(-\infty,0\right). \tag{6}$$

Aux équations ci-dessus on ajoute :
les conditions initiales

$$\begin{cases} u_i(x,0)=a_i(x)\ ,\dot{u}_i(x,0)=b_i(x)\ , \\ \psi_{ij}(x,0)=c_{ij}(x)\ ,\dot{\psi}_{ij}(x,0)=d_{ij}(x)' \end{cases} \tag{7}$$

et les conditions sur la frontière qui, pour le problème mixte sont:

$$\begin{cases} u_i = \tilde{u}_i \text{ , sur } \left(\Sigma_1\right) x\,[0,\infty), \quad t_i = (\tau_{ji} + \sigma_{ji}) \cdot n_j = \tilde{t}_i \text{ ,} \\ \text{sur } \left(\Sigma_2\right) x\,[0,\infty), \psi_{iJ} = \tilde{\psi}_{ij} \text{ , sur } \left(\Sigma_3\right) x\,[0,\infty), \end{cases}$$

$$\left\{ T_{ij} = \mu_{kij}\eta_k = \tilde{T}_{ij} \text{ , sur } \left(\Sigma_4\right) X\,[0,\infty) \right. \tag{8}$$

ou (Σ_β) sont des parties de (Σ), de sorte que:

$$\left(\Sigma_1\right) \cup \left(\Sigma_2\right) = \left(\Sigma_3\right) \cup \left(\Sigma_4\right) = \left(\Sigma\right),$$
$$\left(\Sigma_1\right) \cap \left(\Sigma_2\right) = \left(\Sigma_3\right) \cap \left(\Sigma_4\right) = \varnothing,$$

pendant que t_i sont les composantes du vector force superficielle et T_{ij} – composantes du tenseur microforce superficielle ; a_i, b_i, c_{ij}, d_{ij}, t_i ,ψ_{ij} , T_{ij} sont des fonctions prescrites alors que n_i sont les composantes de la normale extérieure unitaire a (Σ).

Si on note :

$$E_{ijkn} = 2 \cdot A_{ijkn} - C_{ijkn} \text{ , } F_{ijkn} = B_{ijkn} - C_{ijkn}, \tag{9}$$

les équations constitutives (3) et les conditions (4) deviennent

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \varepsilon_{kn} * dE_{ijkn} + \gamma_{kn} * dC_{ijkn}, \\ \sigma_{ij} = \varepsilon_{kn} * dC_{ijkn} + \gamma_{kn} * dF_{ijkn}, \\ \mu_{ijk} = \chi_{mnp} * dL_{ijkmnp}, \text{ sur } (\Omega) x \left(-\infty, +\infty\right), \\ E_{ijkn} = E_{jikn} = E_{knij} \text{ , } C_{ijkn} = C_{jikn} = C_{knij} \text{ ,} \\ F_{ijkn} = F_{knij} \text{ , } \quad L_{ijkmnp} = L_{mnpijk} \text{ ,} \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} I_{ij}(x) = I_{ji}(x) \text{ , } I_{jk} \cdot \eta_{ij} \cdot \eta_{ik} \geq I \cdot \eta_{ij} \cdot \eta_{ij} \text{ ,} \\ \left(\forall\right)\eta_{ij} > 0 \text{ , } I = const. \rangle 0, \rho(x) \geq \rho_0 > 0. \end{cases} \tag{11}$$

2. THÉORÈME D'UNICITÉ

Si E_{ijkn}, C_{ijkn}, F_{ijkn}, L_{ijkmnp} on la transformations de Laplace, alors le problème de la viscoélasticité linéaire avec microstructure a tout au plus une solution qui possède la transformation de Laplace par rapport au temps.

<u>Démonstration</u>. On suppose que le problème de la viscoélasticité linéaire avec microstructure aurait deux solutions:

$$S^{(\alpha)} \equiv \left\{ u_i^{(\alpha)}, \psi_{ij}^{(\alpha)}, \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, \gamma_{ij}^{(\alpha)}, \chi_{ij}^{(\alpha)}, \tau_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)}, \mu_{ijk}^{(\alpha)} \right\},$$
$$\left(\alpha = 1,2\right)$$

Il résulte que:

$$S \equiv S^{(1)} - S^{(2)} = \left\{ u_i, \psi_{ij}, \varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \chi_{ijk}, \tau_{ij}, \sigma_{ij}, \mu_{ijk} \right\} \text{ ,}$$

satisfait aux équations :

$$\begin{cases} \left(\tau_{ij} + \sigma_{ji}\right)_{,j} = \rho \cdot \ddot{u}_i \text{ ,} \\ \mu_{kij,k} + \sigma_{ij} = I_{is} \ddot{\psi}_{sj} \text{ ; } \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad ; \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(u_{j,i} + u_{i,j}\right) \text{ ,} \\ \gamma_{ij} = u_{j,i} - \psi_{ij} \text{ ,} \\ \chi_{ijk} = \psi_{jk,i} \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \tau_{ij} = \varepsilon_{kn} * dE_{ijkn} + \gamma_{kn} * dC_{ijkn} \text{ ,} \\ \sigma_{ij} = \varepsilon_{kn} * dC_{ijkn} + \gamma_{kn} * dF_{ijkn} \text{ , ;} \\ \mu_{ijk} = \chi_{mnp} * dL_{ijkmnp} \end{cases} \tag{14}$$

et les conditions:

$$u_i(x,0) = 0 \text{ , } \dot{u}_i(x,0) = 0 \text{ , } \psi_{ij}(x,0) = 0 \text{ ,}$$
$$\dot{\psi}_{ij}(x,0) = 0 \tag{15}$$

$$\begin{cases} u_i = 0 \text{ , sur } \left(\Sigma_1\right) x\,[0,\infty), \quad t_i = 0 \text{ sur } \left(\Sigma_2\right) x\,[0,\infty), \\ \psi_{ij} = 0, \text{ sur } \left(\Sigma_3\right) x\,[0,\infty), \\ T_{ij} = 0 \text{ sur } \left(\Sigma_4\right) X\,[0,\infty) \end{cases} \tag{16}$$

Appliquant la transformation de Laplace [1] aux équations (12)-(14), (16) et compte tenu de (15) on obtient:

$$\begin{cases} \left(\bar{\tau}_{ij} + \bar{\sigma}_{ji}\right)_{,j} = \rho \cdot p^2 \cdot \bar{u}_i \text{ ,} \\ \mu_{kij,k} + \bar{\sigma}_{ij} = I_{is} \cdot p^2 \cdot \bar{\psi}_{sj} \text{ ;} \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\bar{u}_{j,i} + \bar{u}_{i,j}\right) \text{ ,} \\ \bar{\gamma}_{ij} = \bar{u}_{j,i} - \bar{\psi}_{ij} \text{ ,} \\ \bar{\chi}_{ijk} = \bar{\psi}_{jk,i} \end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{ij} = -\overset{o}{E}_{ijkn}\bar{\varepsilon}_{kn} - \overset{o}{C}_{ijkn}\bar{\gamma}_{kn} + p\bar{E}_{ijkn}\bar{\varepsilon}_{kn} + p\bar{C}_{ijkn}\bar{\gamma}_{kn} \\ \bar{\sigma}_{ij} = -\overset{o}{C}_{ijkn}\bar{\varepsilon}_{kn} - \overset{o}{F}_{ijkn}\bar{\gamma}_{kn} + p\bar{C}_{ijkn}\bar{\varepsilon}_{kn} + p\bar{F}_{ijkn}\bar{\gamma}_{kn} \\ \bar{\mu}_{ijk} = -\overset{o}{L}_{ijkmnp}\bar{\chi}_{mnp} + p\bar{L}_{ijkmnp}\chi_{mnp} \\ \text{où } \overset{o}{E}_{ijkn} = E_{ijkn}(x,0), \ldots, \end{cases} \tag{19}$$

$\overline{u_i} = 0$ sur (Σ_1), $\overline{t_i} = 0$ sur (Σ_2), $\overline{\psi_{ij}} = 0$ sur (Σ_3), $\overline{T_{ij}} = 0$ sur (Σ_4) (20)

Multipliant l'équation $(17)_1$ par $\overline{u_i}$ et $(17)_2$ par $\overline{\psi_{ij}}$, additionnant et intégrant sur (Ω), il résulte:

$$\int_{\Omega} [\left(\bar{\tau}_{ij}+\bar{\sigma}_{ji}\right)_{,j}\cdot\bar{u}_i+\bar{\mu}_{kij,k}\cdot\bar{\psi}_{ij}+\bar{\sigma}_{ij}\cdot\bar{\psi}_{ij}]d\Omega=$$

$$\int_{\Omega} \rho\cdot p^2\cdot\bar{u}_i\cdot\bar{u}_i+I_{is}\cdot p^2\cdot\bar{\psi}_{sj}\cdot\bar{\psi}_{ij})d\Omega \qquad (21)$$

Appliquant le théorème à la divergence dans (21) et compte tenu de (18) et (16) on déduit:

$$\int_{\Omega}(\bar{\tau}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}+\bar{\sigma}_{ji}\bar{\gamma}_{ij}+\bar{\mu}_{ijk}\cdot\bar{\chi}_{ijk})d\Omega+$$

$$+\int_{\Omega}(\rho\cdot p^2\cdot\bar{u}_i\cdot\bar{u}_i+p^2\cdot I_{is}\cdot\bar{\psi}_{sj}\cdot\bar{\psi}_{ij})d\Omega=0 \qquad (22)$$

Remplacent (19) dans (22) et prenant en considération (11) nous avons:

$$\int_{\Omega}(\overset{\circ}{E}_{ijkn}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{kn}+2\overset{\circ}{C}_{ijkn}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\gamma}_{kn}+\overset{\circ}{F}_{ijkn}\bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}_{kn}+$$

$$+\overset{\circ}{L}_{ijkmnp}\bar{\chi}_{ijk}\bar{\chi}_{mnp})d\Omega+\int_{\Omega}p(\bar{E}_{ijkn}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{kn}+$$

$$+2\bar{C}_{ijkn}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\gamma}_{kn}+\bar{F}_{ijkn}\bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}_{kn}+\bar{L}_{ijkmnp}\bar{\chi}_{mnp}\bar{\chi}_{ijk})d\Omega+$$

$$+\int_{\Omega}p^2(\rho\cdot\bar{u}_i\cdot\bar{u}_i+I_{is}\cdot\bar{\psi}_{sj}\cdot\bar{\psi}_{ij})d\Omega=0 \qquad (23)$$

Pour chaque ***(x, t)*** on note ***E(x, t), C (x, t), F(x, t)*** les matrices carrées associes a E_{ijkn}, C_{ijkn}, F_{ijkn} du type 9x9, ***L(x, t)*** la matrice carrée associée a L_{ijkmnp}, du type 27x27 et $\varepsilon(x, t)$, $\gamma(x,t)$ les matrices unicolonaires associées à $\varepsilon_{ij}(x, t)$, $\gamma_{ij}(x, t)$ du type

$$M=\begin{pmatrix} E & C & 0\\ C & F & 0\\ 0 & 0 & L\end{pmatrix},\eta^T=\left(\varepsilon\,\gamma\,\chi\right), \qquad (24)$$

9x1 alors que $\chi(x, t)$ la matrice unicolonaise associée à $\chi_{ijk}(x, t)$ du type 27x1.

Définissant une matrice ***M(x, t)*** du type 45x45 et une matrice $\eta^T(x, t)$ du type 45x1 par:
la relation (23) devient:

$$-\int_{\Omega}\eta^T\overset{\circ}{M}\bar{\eta}d\Omega+\int_{\Omega}\eta^T\bar{M}\bar{\eta}d\Omega+\int_{\Omega}p^2(\rho\cdot\bar{u}_i\cdot\bar{u}_i+$$

$$+I_{is}\cdot\bar{\psi}_{sj}\cdot\bar{\psi}_{ij})d\Omega=0 \qquad (25)$$

Mais on sait que $\lim\limits_{x\to\infty}p\overline{M}=M_o$ d'où il résulte qu'il existe un $p_1>0$ de sorte que pour $p\geq p_1$ de (25) on obtient :

$$\int_{\Omega}p^2(\rho\cdot\bar{u}_i\cdot\bar{u}_i+I_{is}\cdot\bar{\psi}_{sj}\cdot\bar{\psi}_{ij})d\Omega=0 \qquad (26)$$

La relation (26) de pair avec (11) conduit à

$$\overline{u_i}(x,p)=0,\psi_{ij}(x,p)=0\text{, sur }(\Omega)x[\eta_1,\infty) \qquad (27)$$

d'où il résulte que [1]

$$u_i(x,t)=0,\psi_{ij}(x,t)=0\text{ ,sur }(\overline{\Omega})x[0,\infty) \qquad (28)$$

Vu (12) – (16), on constate que

S = {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

et le théorème est démontré.

Bibliographie

1. Corduneanu A. *Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în electrotehnică, Editura Facla, Timişoara, 1981.*
2. Ieşan D. *Sur la théorie de la viscoélasticité micropolaire, C. Rend. Acad. Sc. Paris, 270, (1979).*
3. Ieşan D. *Mecanica generalizată a solidelor, Univ. „Al.I.Cuza" Iaşi, 1980.*
4. Klune K.A. *Varitional principles in the linear theory of viscoelastic media with microstrucure, Quart. Appl. Math., 28, 1 (1970).*
5. Soos E. *Reciprocity Theorems for Elastic and Thermo-elastic Materials with Microstructure, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 16 (1968).*

Recomandat spre publicare: 14.02.2007