

Теорема площадей в динамике атомно-молекулярной конверсии

Зинган А.П., Хаджи П.И.

Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко

Институт прикладной физики АН Молдовы

e-mail: fmfdekan@spsu.ru

Abstract — Изучена динамика атомно-молекулярной конверсии бозе-эйнштейновского конденсата при падении на систему атомов двух импульсов когерентного лазерного излучения гауссовской формы.

Изучим динамику процесса атомно-молекулярной конверсии под действием двух ультракоротких рамановских импульсов произвольной формы, которую формально можно изобразить в виде реакции $a_1+a_2+c_1 \leftrightarrow b+c_2$, где символы $a_{1,2}$ и b представляют атомы и молекулу соответственно, а c_1 и c_2 – фотоны с частотами ω_1 и ω_2 . Рассматриваемый процесс, в сущности, есть процесс оптической рамановской нутации в условиях атомно-молекулярной конверсии, состоящий в периодическом изменении населенностей атомного и молекулярного состояний под действием двух рамановских импульсов когерентного лазерного излучения. Два свободных различных атома, находящиеся в бозе-конденсате с полной энергией $\hbar(\omega_{10} + \omega_{20})$, переходят в основное состояние гетероядерной молекулы с энергией $\hbar\Omega_0$ через виртуальное возбужденное молекулярное состояние с энергией E_u , одновременно поглощая и излучая кванты света с энергиями $\hbar\omega_1$ и $\hbar\omega_2$ соответственно (рис. 1). Гамильтониан взаимодействия H_{int} , описывающий процесс индуцированной атомно-молекулярной конверсии под действием двух ультракоротких импульсов лазерного излучения как единый (одноступенчатый) процесс, можно представить в виде

$$H_{int} = \hbar g (a_1^+ a_2^+ b c_1^+ c_2 + a_1 a_2 b^+ c_1 c_2^+), \quad (1)$$

где $a_{1,2}$, b и $c_{1,2}$ – бозонные операторы уничтожения атомов, молекул и фотонов соответственно, g – константа взаимодействия. Нелинейность в (1) описывает образование гетероядерного молекулярного бозе-конденсата через стимулированную двумя рамановскими импульсами эмиссию молекулярных бозонов из атомного конденсата. Ранее гамильтониан (1) использовался для исследования процесса рамановской молекулярной фотоассоциации в предположении, что в начальный момент времени заданы плотности атомов, молекул и фотонов. Было показано, что имеют место периодический и аperiodический режимы атомно-молекулярной конверсии. При этом частоты колебаний плотностей частиц существенно зависят от начальных концентраций частиц. Однако эволюция системы под действием ультракоротких импульсов лазерного излучения произвольной формы не изучалась. Вместе с тем импульсное возбуждение системы с длительностями импульсов, на много меньшими времен релаксации атомов и молекул, является наиболее интересным, так как оно допускает возможность гибкого управления процессом атомно-молекулярной конверсии.

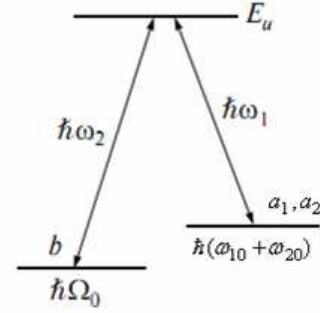


Рис. 1. Энергетическая схема и квантовые переходы в трёхуровневой Λ – схеме.

Используя (1), легко получить систему гайзенберговских уравнений для операторов $\hat{a}_{1,2}$, \hat{b} и $\hat{c}_{1,2}$. Усредняя эту систему уравнений и используя приближение среднего поля (mean field approximation [21]), можно получить систему нелинейных дифференциальных уравнений для амплитуд (параметров порядка) материального $\langle \hat{a}_{1,2} \rangle = a_{1,2}$, $\langle \hat{b} \rangle = b$ и электромагнитного $\langle \hat{c}_{1,2} \rangle = c_{1,2}$ полей

$$\begin{aligned} i\dot{a}_{1,2} &= \omega_{20}a_{1,2} + g a_1^* b c_1^* c_2, \\ i\dot{a}_{1,2} &= \omega_{10}a_{1,2} + g a_2^* b c_1^* c_2, \\ i\dot{b} &= \Omega_0 b + g a_1 a_2 c_1 c_2^*, \\ i\dot{c}_{1,2} &= \omega_1 c_{1,2} + g a_1^* a_2^* b c_2, \\ i\dot{c}_{1,2} &= \omega_2 c_{1,2} + g a_1 a_2 b^* c_1. \end{aligned} \quad (2)$$

где $\dot{a}_{1,2}$ и т.д. означает производную по времени от функции $a_{1,2}(t)$ и т.д.

В условиях точного резонанса ($\omega_{10} + \omega_{20} - \Omega_0 = \omega_2 - \omega_1$) решение уравнений (2) ищем в виде $a_{1,2} = A_{1,2} \exp(-i\omega_{10,20}t + i\varphi)$, $b = B \exp(-i\Omega_0 t + i\psi)$, $c_{1,2} = C_{1,2} \exp(-i\omega_{1,2}t + i\psi_{1,2})$. В результате мы получаем новую систему нелинейных уравнений для амплитуд $A_{1,2}$, B , $C_{1,2}$ и разности фаз:

$$\dot{\theta} = \varphi_1 + \varphi_2 - \psi + \psi_1 + \psi_2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{1,2} &= -g A_2 B C_1 C_2 \sin\theta, \\ \dot{A}_{2,2} &= -g A_1 B C_1 C_2 \sin\theta, \\ \dot{B} &= g A_1 A_2 C_1 C_2 \sin\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{1,2} &= -g A_1 A_2 B C_2 \sin\theta, \\ \dot{C}_{2,2} &= g A_1 A_2 B C_1 \sin\theta, \end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = -g (A_2 B C_1 C_2 / A_1 + A_1 B C_1 C_2 / A_2 - A_2 A_1 C_1 C_2 / B + A_2 A_1 B C_2 / C_1 - A_2 A_1 B C_1 / C_2) \cos\theta. \quad (5)$$

Найдем решения системы (4), задавая следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} A_{1,2}|_{t=0} &= A_{10,20} = \sqrt{n_{10,20}}, & B|_{t=0} &= B_0 = \sqrt{N_0}, \\ \theta|_{t=0} &= \theta_0, \end{aligned}$$

где $n_{10,20}$ и N_0 – плотности атомов и молекул в начальный момент времени.

Вводя далее в рассмотрение плотности частиц $n_{1,2} = |a_{1,2}|^2$, $N = |b|^2$, $f_{1,2} = |c_{1,2}|^2$ и две функции $Q = i(a_1 a_2 b^* c_1 c_2^* - a_1^* a_2^* b c_1^* c_2)$ и $R = a_1 a_2 b^* c_1 c_2^* + a_1^* a_2^* b c_1^* c_2$, получаем для них следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= gQ, & \dot{n}_2 &= gQ, & \dot{N} &= -gQ, & \dot{f}_1 &= gQ, \\ \dot{f}_2 &= -gQ, \\ Q &= 2g(n_2 N f_1 f_2 + n_1 N f_1 f_2 - \\ & n_1 n_2 f_1 f_2 + n_1 n_2 N f_2 - n_1 n_2 N f_1) \end{aligned} \quad (6)$$

Эту систему дополним начальными условиями:

$$n_{1,2}|_{t=0} = n_{10,20}, \quad N|_{t=0} = N_0, \quad f_{1,2}|_{t=0} = f_{10,20}.$$

Из (6) легко получить следующие интегралы движения

$$\begin{aligned} n_1 + N &= n_{10} + N_0, & n_2 + N &= n_{20} + N_0, \\ f_1 + N &= f_{10} + N_0. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее считаем $N_0 = 0$, $n_{10}, n_{20}, f_{10} \neq 0$, а $C_2 = C_{20} \cdot f(t)$, т.е. вводим заданное поле второго импульса. Тогда уравнение для \dot{C}_2 снимаем, а $C_2(t)$ считаем заданной функцией от t .

Вместо времени введем переменную τ , которая определяется интегралом

$$\tau = g \int_0^t C_2(t) dt. \quad (8)$$

Переменная $\tau(t)$ аналогична площади импульса, которая вводится при исследовании эволюции системы двухуровневых атомов под действием поля электромагнитной волны. Функция $\tau(t)$ является конечной для ограниченных во времени рамановских импульсов.

Так как мы полагаем, что $N_0 = 0$, то интегралы движения примут вид $n_1 + N = n_{10}$, $n_2 + N = n_{20}$, $f_1 + N = f_{10}$. Используя (6) и (7), формальное решение задачи можно представить в квадратурах в виде обобщенного эллиптического интеграла (гиперэллиптического интеграла)

$$\int_{N_0}^N \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = 2g\tau \quad (9)$$

где под знаком квадратного корня содержится полином четвертой степени

$$P(N) = N(n_{10} - N)(n_{20} - N)(f_{10} - N) \quad (10)$$

Пусть корни уравнения $N(n_{10} - N)(n_{20} - N)(f_{10} - N) = 0$ расположены в порядке возрастания $0 < n_{10} < n_{20} < f_{10}$. Причем величины n_{10}, n_{20} и f_{10} должны быть отличными от нуля. В противном случае эволюции в системе нет. Решая уравнение

$$\frac{dN}{d\tau} = 2\sqrt{N(n_{10} - N)(n_{20} - N)(f_{10} - N)}$$

учитывая упомянутые условия, получаем следующее решение:

$$\begin{aligned} N &= \frac{f_{10} n_{10} \operatorname{sn}^2(\sqrt{n_{20}(f_{10} - n_{10})}\tau)}{f_{10} - n_{10} \operatorname{cn}^2(\sqrt{n_{20}(f_{10} - n_{10})}\tau)}, \\ k^2 &= \frac{n_{10}(n_{20} - f_{10})}{n_{20}(n_{10} - f_{10})}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\operatorname{sn}(x)$ и $\operatorname{cn}(x)$ – эллиптические функции Якоби с модулем k . Плотность молекул изменяется в

пределах от нуля до n_{10} , т.е. между наименьшими из корней уравнения (10).

Рассмотрим различные формы второго импульса в случае отсутствия молекул в начальный момент времени. Найдем функцию $\tau(t)$ для различных форм импульсов. Если $C_2 = C_{20} t e^{-t/\tau_0}$, тогда $\tau = g c_{20} \tau_0^2 \left(1 - \left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right) e^{-t/\tau_0}\right)$. Видно, что параметр, отвечающий за концентрация фотонов второго импульса в данном приближении будет содержаться в аргументе эллиптических функций, что не позволяет ему существенно влиять на эволюцию системы.

Когда на систему падает гауссовский импульс:

$$C_2 = C_{20} e^{-t^2/\tau_0^2},$$

тогда

$$\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2} g c_{20} \tau_0 \left[1 + \Phi\left(\frac{t}{\tau_0}\right)\right],$$

где $\Phi\left(\frac{t}{\tau_0}\right)$ – функция вероятности, τ_0 – полуширина гауссового импульса.

На рис. 2 представлена временная эволюция плотности молекул в зависимости от отношения n_{10}/n_{20} . Видно, что при $n_{10} \neq n_{20}$ плотность молекул колеблется, присеем при малых значениях времени колебания не возникают, а при определенном соотношении параметров плотность молекул начинает резко возрастать, достигая максимума. Тогда как при $n_{10} = n_{20}$ плотность молекул эволюционирует во времени аperiodически. С ростом отношения n_{10}/n_{20} (при фиксированном n_{20}) от нуля до единицы амплитуда колебаний плотности молекул монотонно возрастает и при $n_{10} = n_{20}$ режим трансформируется в аperiodический. Далее с ростом отношения n_{10}/n_{20} при $n_{10} > n_{20}$ амплитуда колебаний остается постоянной, а период колебаний убывает, т.е. аperiodическая эволюция при $\frac{n_{10}}{n_{20}} = 1$ трансформируется в периодическую при $n_{10}/n_{20} > 1$.

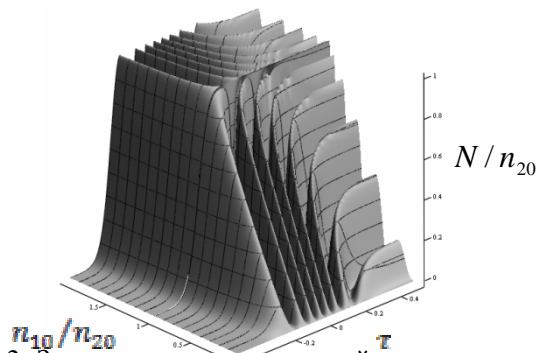


Рис. 2. Зависимость нормированной плотности молекул N/n_{20} от функции $\tau(t)$ и нормированной начальной плотности молекул n_{10}/n_{20} .

Рассмотрим далее случай, когда оба импульса, падающие на систему атомов и молекул, являются ультракороткими. Амплитуды C_1 и C_2 полей этих им-

пульсов будем считать заданными функциями времени и представим их в виде:

$$c_1 = \sqrt{f_{10}} \cdot F_1(t), c_2 = \sqrt{f_{20}} \cdot F_2(t), \quad (12)$$

где $F_1(t)$ и $F_2(t)$ – огибающие этих импульсов, а f_{10} и f_{20} – плотности фотонов в максимумах первого и второго импульсов. При этом мы считаем, что $f_{10}, f_{20} \gg n_0, N_0$, т.е. мы рассматриваем эволюцию системы в приближении заданных плотностей фотонов обоих импульсов. В этом приближении удастся получить аналитические решения уравнений для плотностей атомов и молекул и разности фаз θ . Аналогично предыдущему случаю вместо времени введем переменную τ , которая определяется интегралом

$$\tau = g\sqrt{f_{10}f_{20}} \int_{-\infty}^t F_1(t)F_2(t) dt. \quad (13)$$

В (13) под знаком интеграла содержится произведение огибающих обоих импульсов. Функция $\tau(t)$ является конечной для ограниченных во времени рамановских импульсов и существенно определяется степенью перекрытия их огибающих. Считая эти импульсы, например, гауссовскими:

$$F_1(t) = \exp(-t^2/\tau_1^2),$$

$F_2(t) = \exp(-(t-t_0)^2/\tau_2^2)$, где τ_1 и τ_2 – полуширины этих импульсов, а t_0 – временная задержка между пиками обоих импульсов, для функции $\tau(t)$ получаем выражение

$$\tau(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} g\sqrt{f_{10}f_{20}} \frac{\tau_1\tau_2}{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}} e^{-t_0^2/(\tau_1^2+\tau_2^2)} \left[1 + \Phi \left(t \frac{\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}}{\tau_1\tau_2} - \frac{t_0\tau_1}{\tau_2\sqrt{\tau_1^2+\tau_2^2}} \right) \right] \quad (14)$$

где $\Phi(x)$ – функция вероятности. Переходя в (6) и (7) от t к τ , получаем интегралы движения для плотностей атомов и молекул

$$n_1 + N = n_{10}, n_2 + N = n_{20} \quad (15)$$

и нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию плотности молекул

$$\frac{dN}{d\tau} = \pm 2\sqrt{N(n_{10}-N)(n_{20}-N) - n_{10}n_{20}\cos^2\theta_0} \quad (16)$$

Полагая в (16) $\theta_0 = \pi/2$ и $n_{10} > n_{20}$ найдем решение данного дифференциального уравнения, которое примет вид:

$$N = n_{20} \operatorname{sn}^2(\sqrt{n_{10}}\tau). \quad (17)$$

В данном приближении при падении на систему двухуровневых атомов пары гауссовских импульсов с одинаковыми полуширинами, но не разнесенными во времени ($t_0 = 0$) эволюция системы характеризуется колебательным режимом в окрестности значений времени около нуля (Рис.3).

В заключение отметим, что в данном сообщении представлены результаты исследования явления атомно-молекулярной конверсии под действием двух ультракоротких рамановских импульсов резонансного лазерного излучения. В приближении заданной плотности фотонов обоих импульсов, имеющих произ-

вольную форму, удастся получить точные аналитические решения для плотности образующихся молекул путем введения площади перекрытия обоих импульсов либо площади одного из них. Показано, что эволюция системы может быть как периодической, так и аperiodической. Предсказана возможность контроля за ходом реакции и уровнем производства молекул вариацией площадей падающих импульсов и начальных плотностей материальных частиц.

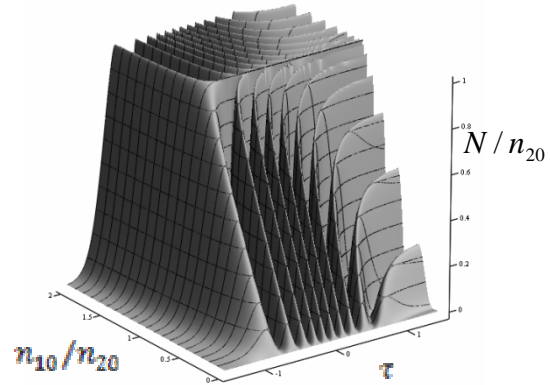


Рис. 3. Зависимость нормированной плотности молекул N/n_{20} от функции $\tau(t)$ и нормированной начальной плотности молекул n_{10}/n_{20} при падении на систему двух гауссовских импульсов.