DETERMINAREA CARACTERISTICELOR PROPRII DE VIBRAȚIE A STRUCTURILOR DISCRETE CU APLICAREA METODELOR NUMERICE

Alina PEREVEDNIUC

Universitatea Tehnică a Moldovei

Abstract: *În prezenta lucrare s-a propus să se studieze unele metode numerice de determinare a caracteristicelor proprii de vibrație pentru structurile discrete, principiul de selectare în dependență de particularitățile structurii. Metodele studiate au la bază aproximarea formelor proprii de vibrație și corectarea lor succesivă printr-o operație de triere.*

Cuvinte cheie: *Caracteristici proprii de vibrație, pulsație fundamentală, formă proprie de vibrație*

Întroducere

Determinarea caracteristicelor proprii de vibrație ale structurilor reprezintă o problemă fundamentală în dinamica construcțiilor. Calculul exact al caracteristicilor proprii de vibrație ale unei structuri prin metode matematice tradiționale de rezolvare este complicat, indeosebi în cazurile cînd sistemul are un număr ridicat a gadelor de libertate.

I. Metoda RAYLEIGH

Metoda elaborată de Rayleigh are la bază legea conservării energiei și se bazează pe aproximarea prealabilă a formelor de vibrație cărora urmează să li se determine pulsațiile corespunzătoare. Se folosește în special la determinarea pilsației fundamentale a unui sistem oscilant cu un număr limitat sau infinit de grade de libertate.

Rayleigh a formulat un principiu, care sună în felul următor: *pulsația proprie a unui sistem conservativ, care vibrează în jurul poziției de echilibru, are o valoare staționară în vecinătatea modului propriu corespunzător. Această valoare staționară este totdeauna minimă pentru modul fundamental.*

O aproximare satisfăcătoare a formei fundamentale se consideră deformata statică, ce provine de la acțiunea încărcărilor gravitaționale *mg* aplicate pe direcția gardelor de libertate GLD a sistemului.

În cazul unui sistem discret cu „*n”* grade de libertate, masele $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_k, \ldots, m_n$ efectuează mișcările $x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_k(t), \ldots, x_n(t)$ pe direcția GLD (fig. 1).

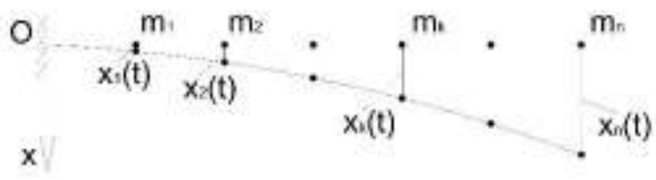

Fig. 1

Expresia pulsației fundamentale, care poartă denumirea de Formula lui Rayleigh sau Cîtul lui Rayleigh:

$$\omega_{1,R}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2} = g\,\frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k^2} \qquad (1)$$

Pulsația obținută va coincide cu pulsația fundamentală reală numai în cazul în care variația amplitudinilor x_k ale deformatei dinamice (1) are aceiași configurație geometrică cu forma proprie fundamentală.

Folosirea deformatei statice conduce la rezultate satisfăcătoare din punct de vedere practic, deoarece pulsația obținută este cu 0...5% mai mare decît pulsația exactă.

$\omega_{1,RAYLEIGH} \geq \omega_{1,EXACT}$ $\quad \omega_{1,R} \approx (1\ldots1{,}05)\omega_{1,EX}$

II. Metoda DUNKERLEY-SOUTHWELL

Această metodă poate fi aplicată pentru sisteme cu un număr finit de grade de libertate şi face posibilă determinarea directă a pulsaţiei fundamentale de vibraţie.

Valoarea pulsaţiei obţinută prin aplicarea acestei metode are character aproximativ, care va fi cu atît mai aproape de valoarea exactă, cu cît pulsaţiile de ordin superior sînt mai mari în raport cu pulsaţia fundamentală.

Formula pulsaţiei fundamentale, care caracterizeză metoda Dunkerley-Southwell are forma:

$$\frac{1}{\omega_{1,D}^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_{kk}^2} \qquad (2)$$

Unde $\omega_{11}, \omega_{22}, \ldots\ldots, \omega_{kk}, \ldots, \omega_{nn}$ reprezintă pulsaţiile reale ale sistemului cu *n* GLD (fig. 2)

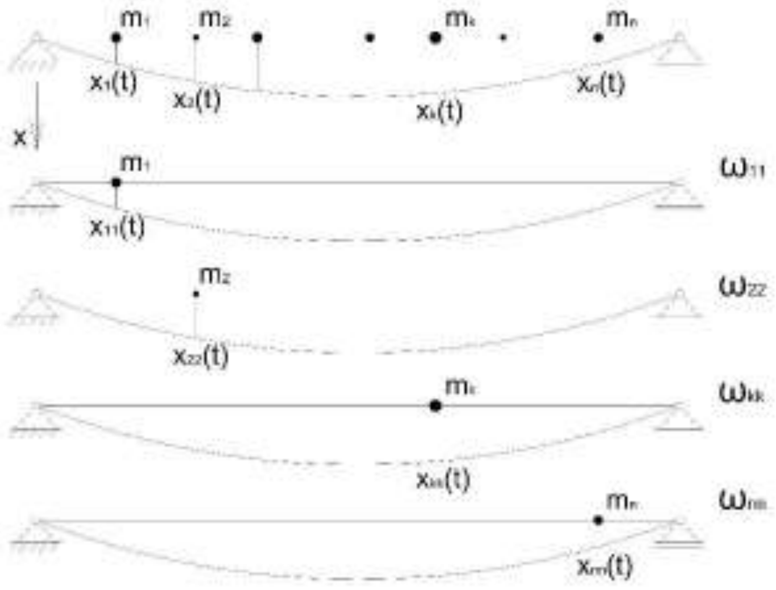

Fig. 2

Valoarea pulsaţiei fundamentale calculată cu formula Dunkerley-Southwell este inferioară valorii exacte.

$\omega_{1,DUNKERLEY} < \omega_{1,EXACT}$

Folosirea concomitentă a metodei Dunkerley-Southwell şi Rayleigh permite să se delimiteze domeniul inferior şi superior de existenţă a pulsaţiei fundamentale exacte.

$\omega_{1,D} < \omega_{1,EX} < \omega_{1,R}$

III. Metoda STODOLA

Se utilizează pentru determinarea simultană a formelor şi pilsaţiilor proprii ale sistemelor oscilante. Se aplică atît sistemelor cu un număr limitat, cît şi celor cu un număr infinit de grade de libertate. Obţinerea caracteristicelor proprii ale sistemului are la bază un proces ce permite trierea soluţiilor corespunzătoare unui anumit mod de vibraţie. Prin metoda Stodola se determină pulsaţia cea mai joasă şi forma proprie respectivă.

Calculul pulsaţiei fundamentale se face folosind relaţia:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^*} \qquad (3)$$

Unde x_k - deplasări statice egale cu amplitudinile sistemului oscilant (fig. 3.1)

x_k^* - deplasările statice produse de forţele de inerţie, pulsaţia proprie avînd o valoare arbitrară (fig. 3.2)

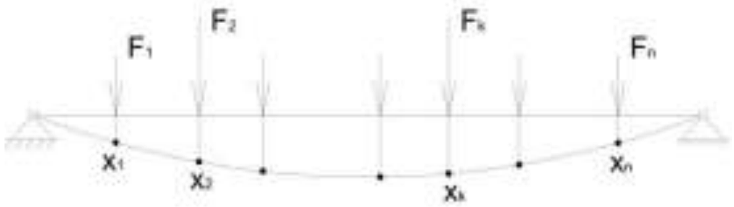

Fig. 3.1

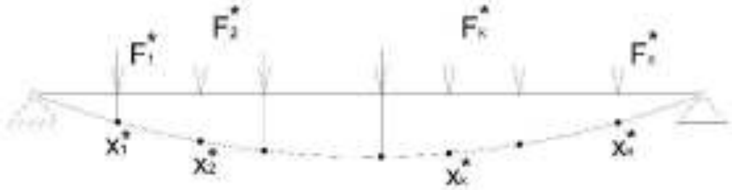

Fig. 3.2

Pilsația proprie tinde către valoarea reală prin mărimi descrescătoare:

$$\omega_1^{(0)} > \omega_1^{(1)} > \ldots > \omega_1^{(j)} > \ldots > \omega_{1,EX}$$

IV. Aplicarea metodei RAYLEIGH

Se vor determina caracteristicele proprii de vibrație pentru structurile cu 12 (fig. 4.1) și 6 nivele (fig. 4.2), folosind această metodă numerică. Pe direcția GLD se aplică sarcini orizontale echivalente Q_k maselor structurii.

Fig. 4.1

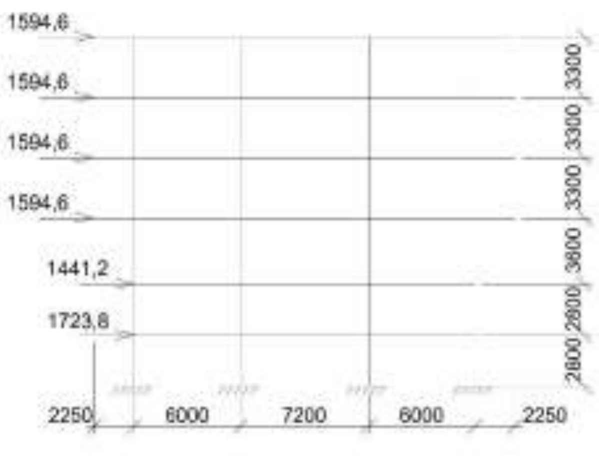

Fig. 4.2

Aplicînd metoda lui Rayleigh, se obține valoarea pulsației fundamentale:

$$\omega_{1,R(12)}^2 = g\frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k^2} = 57{,}761; \qquad \omega_{1,R(6)}^2 = g\frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k^2} = 495{,}002$$

$$\omega_{1,R(12)} = 7{,}6 \quad s^{-1}; \qquad \omega_{1,R(6)} = 22{,}249 \quad s^{-1}$$

Astfel putem determina perioada:

$$T_{(12)} = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}826 \quad s; \qquad T_{(6)} = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}282 \quad s$$

Deasemenea calculul structurilor reprezentate in figura 4.1 şi 4.2 s-a efectuat în programul SCAD. Prin urmare s-au obținut valorile reprezentate în tabelul 1 pentru structura cu 12 nivele și, respectiv, în tabelul 2 pentru structura cu 6 nivele.

Tabelul 1

Forma	Valoarea proprie	Frecvența		Perioada (s)	Masele modale (%)		
		1/s	Hz		Mx	My	Mz
1	0,045	22,139	3,525	0,284	66,546	0	0
2	0,012	82,084	13,071	0,077	25,192	0	0,738
3	0,011	87,518	13,936	0,072	0,095	0	64,31
S					91,832	100	65,048

S – suma maselor modale

Tabelul 2

Forma	Valoarea proprie	Frecvența		Perioada (s)	Masele modale (%)		
		1/s	Hz		Mx	My	Mz
1	0,131	7,642	1,217	0,822	64,143	0	0
2	0,029	34,572	5,505	0,182	20,815	0	0
3	0,02	51,116	8,14	0,123	0	0	72,585
S					84,958	100	72,586

S – suma maselor modale

Comparînd rezultatele obținute, putem afirma că valorile frecvențelor obținute prin metoda Rayleigh deviaza cu (0,995 – 1,007)% de cele calculate cu programul SCAD.

Bibliografie

1. Mihail Ifrim. *Dinamica structurilor și inginerie seismica.* Editura Didactică și Pedagigică București.
2. Ray W. Clough, Joseph Penzien. *Dynamics of structures.* Мосва Стройиздат 1979
3. Horea Sandi *Elemente de dinamica structurilor.* Editura Tehnică
4. Madalina Calbureanu, Raluca Malciu. *Dinamica structurilor ți elemente de inginerie seismică. Îndrumare de laborator.* Editura Universitaria 2015
5. Aurel Stratan. *Dinamica structurilor și inginerie seismică*. Timișoara 2014