INSTRUMENTE ŞI DISPOZITIVE GEOMETRICE UTILIZATE ÎN MATEMATICĂ, DESEN TEHNIC ŞI CONSTRUCŢII (partea II)

Lorin Cantemir, prof. univ. dr., membru ASTR,
Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi (coordonator);
Ştefan Andrei, prof. gr. I, Buhuşi, jud. Bacău;
Constantin Antonovici, prof. gr. I, Piatra – Neamţ.

1. Consideraţii referitoare la construcţiile geometrice

Problemele de construcţii geometrice se află, de peste două mii de ani, printre problemele esenţiale ale geometriei elementare, fiind abordate chiar în Elementele lui Euclid. El considera că o problemă de construcţii geometrice este una în care se dau o serie de elemente geometrice şi se cere să se construiască alte figuri geometrice, impunându-se restricţii asupra instrumentelor care sunt admise pentru realizarea construcţiei.

A rezolva o problemă de construcţii geometrice nu înseamnă doar să desenezi figurile, ci să furnizezi un algoritm prin care orice punct al figurii sau figurilor noi să poată fi reprezentat. Desigur că, atât algoritmul, cât şi problemele de construcţii, trebuie realizate într-un număr finit de paşi, cu precizarea clară a setului de instrumente utilizate.

Există situaţii când o problemă este nerezolvabilă cu unele istrumente, dar posibilă cu altele. Cel mai concludent exemplu îl constituie clasica problemă a trisecţiunii unui unghi, care nu se poate realiza cu rigla negradată şi compasul, dar e posibilă cu rigla gradată şi compasul, fapt sesizat chiar de Arhimede şi prezentat de noi în prima parte. Totuşi, el a rezolvat această provocare, utilizând în loc de cerc, spirala ce-i poartă numele. Să presupunem că unghiul ABC trebuie trisectat. Trisectăm segmentul BC (C fiind pe spirală) şi găsim că BD este egal cu o treime din BC. Desenăm cercul cu centrul în B şi rază BD şi notăm cu E intersecţia lui cu spirala. (fig. 1). Unghiul ABE este egal cu o treime din unghiul ABC.

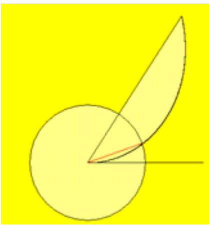


Fig. 1.

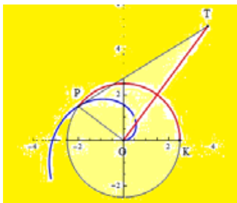


Fig. 2.

De menţionat că, folosind tot această spirală, el a rezovat şi altă problemă clasică a antichităţii: cuadratura cercului. Arhimede ştia că aria unui cerc (disc) este egală cu aria unui triunghi dreptunghic care are o catetă egală cu circumferinţa cerclui, iar cealaltă egală cu raza sa, triunghiul trasformându-se într-un pătrat echivalent. Deci el mai trebuia să construiască grafic un segment egal cu un arc de cerc, fapt reprezentat în figura 2. Fie P un punct pe primul viraj al spiralei şi T intersecţia tangentei în P la spirală cu perpendicularaîn O la OP. OT are lungimea arcului PK al cercului cu raza OP.

Noi am realizat trisecţia unghiului (fig. 1) şi cuadratura cercului (fig. 2) cu ajutorul calculatorului prin programele **trisecţia** şi **cuadratura**, aflate pe adresa: andrei33ro@yahoo.com.

Revenind la trisecţia unghiului, primul care s-a ocupat de acestă problemă şi a rezolvat-o cu o curbă numită mai târziu cuadrică (cu ajutorul căreia se poate împărţi un unghi în oricâte părţi egale dorim), a fost Hippios din Elis (420 î. Hr,). Unii matematicieni au rezolvat această problemă clasică folosind şi alte curbe: Nicomede a utilizat o concoidă, Clairout şi Chasles au dat soluţii cu hiperbola, iar R. Descartes a intersectat un cerc cu o parabolă (Geometrie -1637). Au mai fost folosite şi: melcul lui Pascal, cicloida lui Ceva, curba lui Schoute etc. (Temistocle Bîrsan, prof. dr. Universitatea Tehnică „*Gh. Asachi*" Iaşi).

De regulă, rezolvarea unei probleme de construcţii geometrice presupune elaborarea unui algoritm de execuţie, bazat pe analiza proprietăţilor caracteristice figurii respective, demonstrarea corectitudinii acestui algoritm, discuţia diferitelor situaţii speciale care pot apărea, precum şi construirea lor în fiecare caz particular.

Concluzionând aceste idei, precizăm că, în rezolvarea unei probleme de construcţie, se pot deosebi patru etape:

- Analiza problemei - se presupune figura construită şi se caută proprietăţi pe baza cărora se poate efectua construcţia;
- Construcţia efectivă - din analiza problemei se identifică acele proprietăţi care fac posibile construcţiile elementare, având ca finalitate obţinerea rezultatului;
- Demonstraţia - se arată că figura construită îndeplineşte condiţiile;
- Discuţia - se consideră toate cazurile pe care le pot prezenta condiţiile iniţiale şi se arată cum se efectuează construcţia şi câte soluţii sunt în fiecare caz în parte.

În situaţia în care, pe baza cunoştinţelor existente, necesitând numai etapele b)-d) se poate executa construcţia, se spune că rezolvarea s-a realizat prin metoda sintezei. Dacă, însă, cuprinde şi prima etapă, se spune că ea s-a realizat prin metoda analizei.

Deoarece în partea a doua a lucrării, vom aborda construcţiile cu rigla şi compasul, ne vom referi aici, la câteva construcţii realizate fără compas.

2. Cu rigla cu două muchii

Înainte de rezolvarea problemelor propuse prin metoda sintezei, atenţionăm că aceste construcţii nu reprezintă demonstraţii riguroase ale enunţurilor, ci doar metode grafice pentru prezentarea cerinţelor exprimate. Discuţiile cazurilor posibile le lăsăm cititorilor, anunţându-i când sunt mai multe variante.

Facem precizarea că, numai cu acest instrument, se poate construi o geometrie euclidiană plană nemetrică, adică exceptând congruenţele, proporţionalitatea sau figurile de dimensiuni date, pentru care este necesară o unitate de măsură. Prezentăm, spre exemplificare, unele construcţii principale, folosind simbolurile matematice uzuale: [AB] = segment închis, (AB) = segment deschis, AB = dreaptă sau lungimea segmentului [AB], m($\angle$A) = măsura unghiului A, **a, b, c, d…** drepte date apriori, m, n, p, q … drepte determinate de muchiile riglei. Vom nota punctele şi dreptele date îngroşat, cele ajutătoare subţiri, iar etapele de construcţie cu (1), (2),...

Prezentăm următoarele construcţii:

1) Mijlocul unui segment.

Se dă: [AB]; se cere: mijlocul M al segmentului [AB].

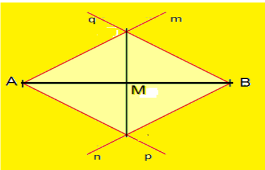


Fig. 3.

Deosebim două cazuri: **a)** AB > h (lăţimea riglei); **b)** AB $\leq$ h.

Sunt mai multe metode, dar vom prezenta două: **a) 1)** (1) Aşezăm rigla cu o muchie în A şi cealaltă în B pe direcţia stânga jos – dreapta sus şi trasăm dreptele paralele m şi n. (2) Schimbăm orientarea riglei (care va trece tot prin A şi B) şi trasăm celelalte două paralele p, q. (3) În rombul format, diagonalele se intersectează în **M** (fig.3).

a) Utilizăm teorema: "Într-un trapez, intersecţiile laturilor neparalele, ale diagonalelor şi mijloacele bazelor sunt coliniare". (1) Plasăm muchia m a riglei pe [AB] şi trasăm n. (2) Fie P, Q $\in$ n, PQ $\neq$ AB. (3) AP $\cap$ BQ = {R}. (4) AQ $\cap$ BP ={S}. (5) RS $\cap$ [AB] ={M} (fig. 4).

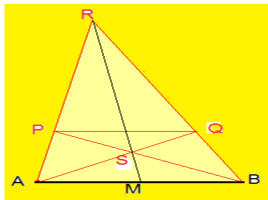


Fig. 4.

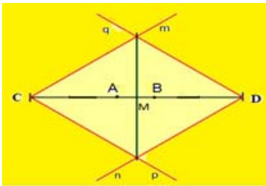


Fig. 5.

b) Deoarece A şi B nu se pot afla simultan pe cele două muchii ale riglei, vom mări AB cu 2h astfel: (1) C $\in$ AB, A $\in$ [CB], CA = h. (2) D $\in$ AB, B $\in$ [AD], BD = h. (3) [CD] şi [AB] au acelaşi mijloc M şi aplicăm **a)** (fig.5)

2) Mediatoarea unui segment. Se dă:[AB]; **se cere:** mediatoarea segmentului [AB]. Aceleaşi variante şi construcţii ca la **1 a)** şi **1 b).**

3) Paralela printr-un punct la o dreaptă.

Se dau: d şi **M** exterior dreptei; **se cere**: paralela prin **M** la **d.**

(1) Poziţionăm rigla cu o muchie pe **M** şi trasăm **m** şi **n**. (2) m $\cap$ **d** ={A}, n $\cap$ **d** = {B}. (3) Deplasăm rigla pe n şi trasăm p, p $\neq$ m. (4) p $\cap$ **d** = {C}. (5) MC $\cap$ n = {D}. (6) AD $\cap$ p = {E}. (7) ME II d (fig. 6).

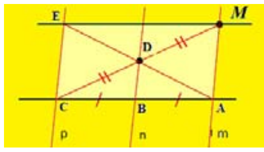


Fig. 6.

4) Perpendiculara într-un punct pe o dreaptă.

Se dau: **d** şi **M** $\in$ **d**; **se cere: Mx** $\perp$ **d.**

(1) Poziţionăm rigla pe **d,** de o parte şi alta a punctului **M** şi marcăm A şi B. (2) Aplicăm **2** pentru [AB]. (fig.7).

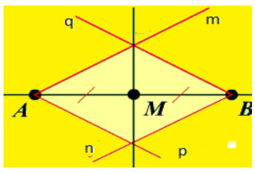


Fig. 7.

5) Perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă. Se dau: d şi **M** exterior lui **d**; **se cere: MN** $\perp$ **d** (1) Construim prin M paralela **a** la **d.** (2) Aplicăm **4** pentru punctul **M** (fig.8).

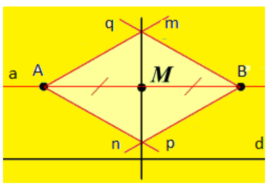


Fig. 8.

Nota: Metoda este utlă şi pentru construirea triunghiului podar al unui punct.

Definiţie: **Triunghiul podar asociat unui punct dintr-un triunghi dat** este format din proiecţiile punctului pe laturile triunghiului. Caz particular: triunghiul ortic.

6) Perpendiculara pe un segment într-o extremitate a sa. **Se dă:** [AB]; **se cere**: perpendiculara pe **AB** în **A.** (1) Considerăm pe AB punctele C, D, A ϵ[CD], CA = AB = h. (2) Aplicăm **4** pentru [CD] (fig. 9).

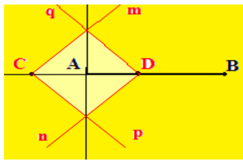


Fig.9.

7**) Antiparalela printr-un punct la o latură a unui triunghi.**

Definiţie: **Dreapta d este antiparalelă cu a faţă de dreptele concurente b şi c dacă intersecţiile lor sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil**.

Deoarece, în această parte a comunicării, nu folosim compasul, menţionăm că într-un triunghi, dreapta care trece prin picioarele înălţimilor a două vârfuri este antiparalelă cu latura a treia. Bazându-ne pe această teoremă, pe care o vom demonstra în partea a doua a lucrării, rezultă construcţia.

Se dau: Δ ABC, M ϵ [AB]; **se cere**: antiparalela prin **M** la **BC.** (1) Construim înălţimile [BD], D ϵ AC şi [CE], E ϵ AB. (2) Desenăm paralela **MN** la DE (fig.10).

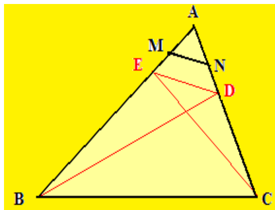


Fig. 10.

Nota: Problema necesită mai multe discuţii în funcţie de natura triunghiului şi de poziţia lui **M** pe AB.

8) Simetricul unui punct faţă de alt punct.

Se dau: **A** şi **M**; **se cere: s**imetricul lui M faţă de A (1) Construim perpendiculara d în **A** pe AM. (2) Fie B, C ϵ d, A ϵ [BC], AB = AC = h. (3) Paralela prin C la MB taie pe AM în N care este simetricul căutat (fig. 11).

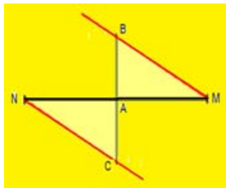


Fig. 11.

Nota: Sunt şi alte metode. De exemplu, metodă analoagă cu **1).**

9**) Aflarea simetricului unui punct faţă de o dreaptă.**
Se dau: d şi **M** exterior dreptei; **se cere** simetricul lui M faţă de d.
Se aplică **5** şi **6** sau, direct, figura 12.

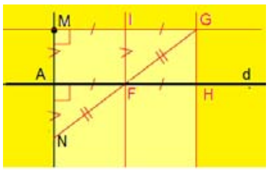


Fig. 12.

10) Împărţirea unui sement în n părţi egale. **Se dă [AB]; se cere:** să se împartă în n părţi egale (n = 3). (1) Trasăm prin A o semidreaptă [Ax pe care fixăm într- un sens punctele M, N, P a.î. AM = MN = NP = h. (2) Unim P cu B. (3) Prin M şi N trasăm paralelele la PB. (4) Intersecţiile lor, R şi S, cu [AB] sunt punctele dorite.

Nota: Evident, metoda e valabilă pentru oricare **n**, număr natural nenul (fig.13)

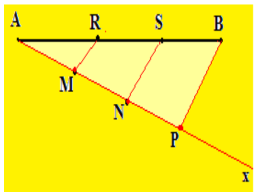
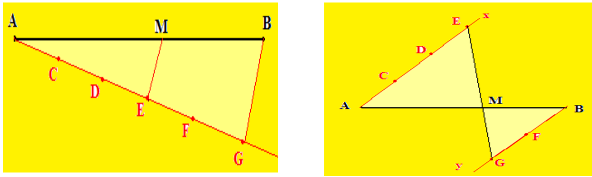


Fig. 13.

11) Împărţirea unui segment într-un raport dat, m / n, m, n ϵ N*;
Se dă: [AB]; **se cere**: să se determine **M** (interior segmentului) şi **N (**exterior), astfel ca AM / MB = AN / NB = m / n, m şi n numere naturale nenule.
Considerăm cazul m / n = 3 / 2).

Pentru găsirea lui **M** redăm două metode:

1) (1) Trasăm o semidreptă oarecare (Ax. (2) Fixăm pe ea cinci puncte (m+n) succesive: C, D, E, F, G astfel încât AC = CD = DE = EF = FG = h. (3) Paralela prin E (AE = 3h) la BG (AG = 5h) intersectează pe [AB] în **M** (fig. 14, a).



a. b.

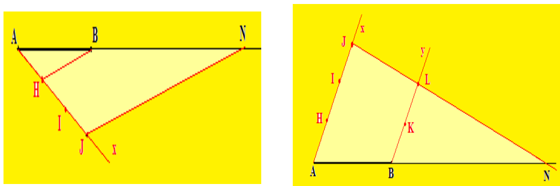
Fig. 14.

2) (1) Construim prin A şi B două paralele oarecare [Ax şi [By în semiplanuri opuse. (2). Pe [Ax considerăm punctele C, D, E, a.î. AC = CD = DE = h, (AE = 3h). (3) Pe [By luăm F, G a.î. BF = FG = h (BG = 2h). (4) EG ∩ [AB] = {**M**} (fig. 14, b)

Pentru **N** exterior redăm tot două metode:

1**)** (1) Trasăm prin A semidreapta [Ax. (2) Fixăm puncele H, I, J a. î. AH = HI = IJ = h. (3) Paralela prin J la BH taie [AB în **N** (fig.15, a).

2) (1) Trasăm o semidreptă oarecare [Ax. (2) Construim prin B în acelaşi semiplan, paralela [By la Ax. (3) Fixăm pe [Ax punctele H, I, J, astfel încât AH = HI = IJ = h. (4) Pe [By luăm K, L astfel încât BK = KL=h.(5) JL ∩ AB={**N**}(fig.15,b).



a. b.

Fig. 15.

Nota: Punctele M şi N se numesc conjugate armonicîn raport cu A şi B. Dacă raportul m / n = 1, atunci punctul M se găseşte la mijlocul segmentului AB, iar punctul N este aruncat la infinit.

12) Teorema lui Thales

Se dau: Δ ABC, M ϵ AB, N ϵ AC, MN II BC; **se cere:** să se arate că AM / MB = AN / NC.

(1) Construim prin A paralela m la BC (conf. 3). (2) Cu o muchie pe AB (în semiplanul opus lui C) trasăn dreapta n (n ll AB). (3) Analog p ll AC în semiplanul opus lui B. (4) {D} = n ∩ m, {E} = n ∩ MN, {F} = n ∩ BC. (5) {G} = p ∩ m, {H} = p ∩ MN, {I} = p ∩ BC. (6) Avem: (1) aria [ADEM] = AM × h = EM × i (i este distanţa dintre d şi MN); (2) aria [AGHN] = AN× h = HN × i; (3) aria [MEFB] = MB × h = EM × j (j este distanţa dintre MN şi BC); (4) aria [NHIC] = NC × h = HN × j. (7) Împărţind relaţia (1) la (3) şi (2) la (4) obţinem: (5) aria [ADEM] / aria [MEFB] = (AM × h) / (MB ×h) = (EM ×i) / (EM × j) <=> AM/ MB =i / j; şi (6) aria [AGHN] / aria [NHIC] = (AN × h) / (NC ×h) = (HN × i) / (HN ×j) <=> AN / NC = i / j; (8) Din (5) şi (6) rezultă AM / MB = AN / NC (fig.16)

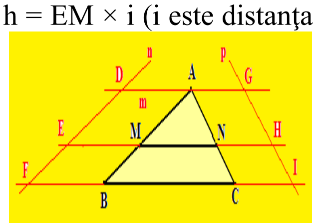


Fig.16.

Nota: Analog abordăm problema secantelor tăiate de drepte paralele AB / BC = DE /EF (fig.17).

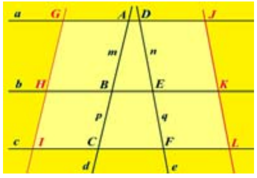


Fig. 17.

13) Împărţirea unui segment în raportul $\sqrt{n}$ .n є N

Cazuri particulare: a) n = 3 şi b) n = 5.

a) Se dă [AB]; se cere: M є [AB], AM / MB= $\sqrt{3}$.

(1) Trasăm prin A o semidreaptă (Ax. (2) Construim în semiplanul opus lui B, un pătrat de latură h cu vârful în A şi o latură pe (Ax. (3) Diagonala sa, AD = h√2. (4) Construim în semiplanul [ADB, perpendiculara în D pe AD (conf. **6**). (5) Marcăm pe ea F a.î. DF = h, => AF = h$\sqrt{3}$. (6) Pe (AF marcăm, în exteriorul [AF] punctul G a. î. FG = h. (7) Paralela prin F la BG intersectează (AB) în **M** (q. e. d.) (fig.18).

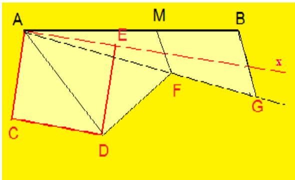


Fig. 18.

Justificarea construcţiei se bazează pe teorma lui Thales aplicată în triunghiul AGB: AM/ MB= AF / FG <=> AM / MB = h$\sqrt{3}$ / h = $\sqrt{3}$ (q. e. d.)

b) Se dă [AB]; se cere: M є [AB] a. î. AM / MB = $\sqrt{5}$ **.**

(1) Desenăm o semidreaptă [Ax. (2) Construim în semiplanul opus lui B, dreptunghiul ACDE, E є (Ax, având dimensiunile 2h şi h. (3) Diagonala sa AD = h√5. (4) Pe [AD, considerăm F a. î. D є [AF] şi DF = h. (5) Paralela prin D la FB intersectează (AB) în **M** (q. e. d.). Justificarea este analoagă cu cea de la **a)** (fig.19).

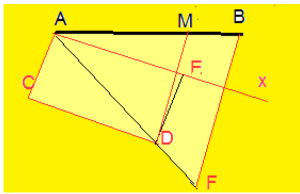


Fig. 19.

Nota: Inductiv, împărţim un segment în orice raport $\sqrt{n}$, n є **N***.

14) Împărţirea unui segment în raportul de aur.

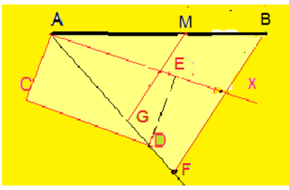


Fig. 20.

Raportul de aur sau secţiunea de aur

φ = (1 + √5) / 2 ≈ 1,6180339887…(primul număr iraţional descoperit şi definit în istorie).

Se dă: [AB]; **se cere:** M є [AB] a. î. AM / MB = φ. (1) Desenăm o semidreaptă [Ax. (2) Construim în semiplanul opus lui B, dreptunghiul ACDE cu [AE] pe (Ax, având dimensiunile 2h şi h. (3) Diagonala sa, AD = h√5. (4) Pe [AD considerăm F a. î. D є [AF] şi DF = h. (5) Fie G mijlocul lui [AF]. (6) Pe [GF] consider H a. î. GH = h. (7) Paralela prin G la HB intersectează (AB) în **M** care este punctul căutat (fig. 20).

15 a) Linia mijlocie în triunghi.

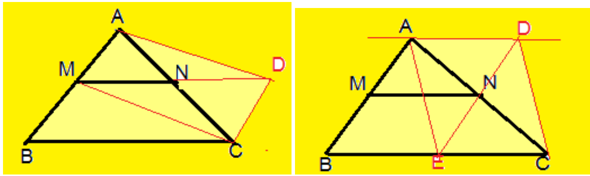
Se dau: Δ ABC, M, N mijloacele [AB] şi [AC]; **se cere**: MN II BC, MN = BC / 2.

Ne vom limita la două metode:

(1) Fixăm M şi N. (2) Construim D, simetricul lui M faţă de N. (3) AMCD este paralelogram => CD II AM<=> CD II MB. (4) CD = AM <=> CD = MB.

(5) MBCD este paralelogram. (6) MN II BC şi MN = BC / 2. (fig. 21, a).

2) (1) Fixăm M şi N. (2) Fie a a. î. A $\in$ a şi a II BC. (3) Fie d a. î. N $\in$ d, d II AB. (4) a $\cap$ d ={D}. (5) d $\cap$ BC = {E}. (6) Paralelogramele ABED şi AECD au [AD] latură comună. (7) Rezultă că BE = EC = BC / 2 (fig. 21, b)



a. b.

Fig. 21.

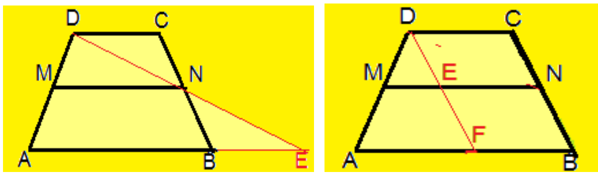
15 b) Linia mijlocie în trapez.

Se dau: ABCD trapez (AB II BC), M şi N mijloacele [AD], [BC]; se cere: să se arate că: MN II BC şi MN = (AB + BC) / 2.

Dăm două metode:

1) (1) Fixăm M şi N. (2) DN $\cap$ AB = {E}. (3) În Δ DAE, AE = AB + CD, MN este linie mijlocie. (4) Aplic **14 a)** (fig. 22, a).

2) (1) Fixăm M şi N. (2) Trasăm d a. î. D $\in$ d, d II BC. (3) d $\cap$ MN = {E}, E $\in$ [MN]. (4) d $\cap$ AB = {F}, F $\in$ [AB]. (5) MN = ME + EN. (6) Dar ME = AF / 2. (7) Efectuând calculele obţinem concluzia (fig. 22, b).



a. b.

Fig. 22.

16) Bisectoarea unui unghi.

Se dă: unghiul xOy; **se cere**: bisectoarea sa (1). Plasăm rigla cu o muchie pe o latură (exemplu pe **Ox**) şi trasăm linia m determinată de cealaltă muchie. (2) Cu o muchie pe Oy trasăm dreapta n determinată de cealaltă muchie. (3) m $\cap$ n = {M}. (4) [OM este bisectoarea dorită (ca diagonală în rombul format) (fig. 23).

Nota: Pentru a împărţi un unghi în 2^m părţi egale se construieşte bisectoarea fiecărui unghi nou format.

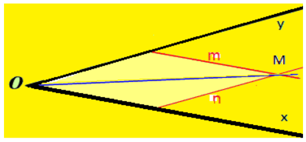


Fig. 23.

17) Un unghi când se ştie o latură şi bisectoarea interioară a sa

Se dau: [Ox şi bisectorea [OM; **se cere**: unghiul xOy. (1) Aşezăm o latură a riglei pe Ox şi trasăm m. (2){M} = (OM $\cap$ m. (3) Plasăm rigla aşa fel încât muchiile să conţină punctele O şi M. (4) Desenăm semidreapta [Oy (fig.23).

18) Drepte isogonale.

Definiţie: Dreptele isogonale sunt dreptele care trec prin vârful unui unghi şi fac unghiuri congruente cu bisectoarea unghiului respectiv. **Se dau**: Δ ABC, bisectoarea [AD, [AE; **se cere**: isogonala [AF a lui [AE. Aplicăm **17** (fig**.** 24).

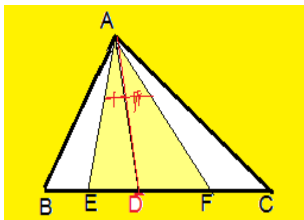


Fig. 24.

19) Construcţia simedianei interioară

Definiţie: **Simediana interioară** este dreapta simetrică unei mediane faţă de bisectoarea. interioară care trece prin acelaşi vârf cu ea.
Se dau: Δ ABC, bisectoarea [AD, mediana [AM], D, M ϵ [BC]; **se cere**: simediana [AE (fig. 25). Aplicăm **18.**

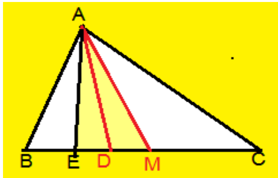
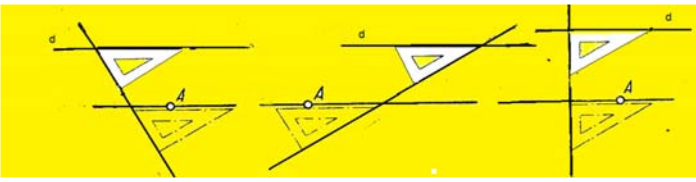


Fig. 25.

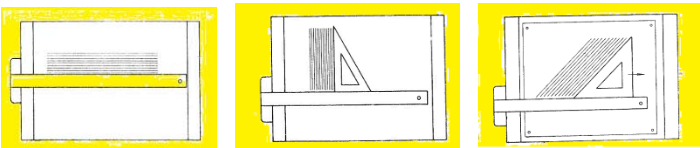
II. Cu rigla, echerul şi teul.

1) Drepte paralele.

Se dau: dreapta d şi punctuA; **se cere**: să se trseze A ϵ a, a II d. Dacă A ϵ d => a ≡ d, deci presupunem că A nu se află pe d. **Metoda 1**. (1) Se aşează echerul cu o catetă sau ipotenuza pe dreapta d. (2) Pe una din laturile libere ale echerului se aşează rigla (fig. 26). (3) Se menţine fixă poziţia riglei şi se deplasează echerul până ce latura care a coincis la început cu d trece prin A. (4) Se trasează după acestă latură dreapta a care este paralelă cu d.

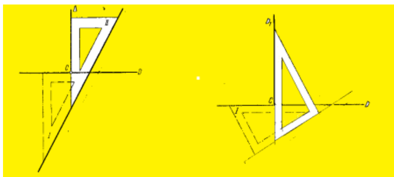

a. b. c.
Fig. 26.

Metoda a II-a. Trasarea dreptelor paralele şi orizontale se poate realiza şi cu ajutorul teului a cărui bază se sprijină pe una. din laturile laterale ale planşetei. Pentru paralele verticale folosim teul şi echerul. Teul rămâne fix, iar echerul se sprijină cu o catetă de acesta. Liniile se trasează după a doua catetă prin deplasarea echerului. (fig.27,b). Dacă este necesar să se deseneze linii paralele oblice se schimbă poziţia teului sau se înlocuieşte teul cu o riglă (fig. 28, c).


a. b. c.
Fig. 27.

2) Drepte perpendiculare

Se dau: dreapta d şi A; se cere: perpendiculara din (în) **A** pe **d**. **Metoda I.** (1) Se aşează o catetă a echerului pe **d**. (2) Se sprijină ipotenuza echerului pe marginea unei rigle sau pe latura altui echer. (3) Păstrând fixă poziţia riglei, se transleazã echerul până când cealaltă catetă va trece prin A (4) Trasăm dreapta cerută (fig. 28, a).


a. b.
Fig. 28.

Metoda a II-a (1) Aşezăm ipotenuza pe dreapta **d.** (2) Apoi, pritr-o rotaţie în planul figurii, se aduce echerul asfel ca să se spijine pe riglă cu a doua catetă. (3) Se traslează până ce ipotenuza trece prin A. (4) Se trasează dreapta (fig. 28, b). Justificările matematice sunt imediate.

3. Aplicaţii

1) Aflarea mijlocului unui sgment [AB] numai cu echerul.

Se dă: [AB]; se cere M, mijlocul său.

(1) Construim perpendiculara din A pe AB. (2) Considerăm pe ea un punct P. (3) Perpendiculara în P pe [AP intersectează perpendiculara în B pe [AB] în Q. (4) AQ ∩ BP = {R}. (5) Perpendiculara prin R pe AB taie acest segment în **M** (fig. 29).

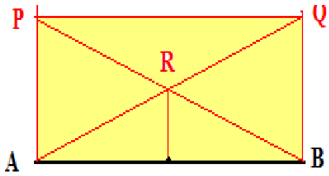


Fig.29.

2) Construcţia unui triunghi echilateral.

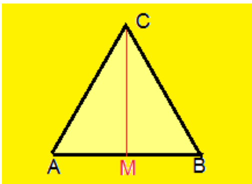


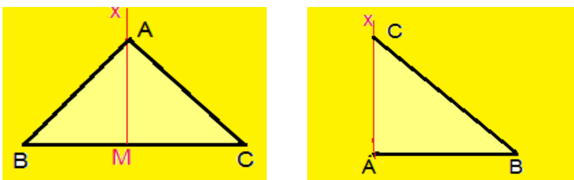
Fig. 30.

Se dă [AB]**: se cere:** Δ ABC echilateral

(1) Construim [AB]**.** (2) Fie [Mx mediatoarea sa. (3) Aşezăm echerul de 60° cu o catetă pe AB şi vârful respectiv în A. (4) Trasăm ipotenuza care intersectează pe [Mx în C. (5) Unim B cu C şi obţinem triunghiul echilateral ABC (fig. 30).

3) Construcţia unui triunghi dreptunghic isoscel.

Sunt două cazuri: **3a) Se dă**: ipotenuza BC = 2h; **se cere**: Δ ABC (1). Considerăm dreapta **d** pe care luăm [BC] de lungime 2h. (2) Construim mediatoarea sa [Mx. (3) Fixăm pe ea A, MA = h. (4) Δ ABC este cel dorit (fig. 32 a). **3b) Se dă**: o catetă AB = h; se cere: Δ ABC (1) Considerăm dreapta **d** pe care luăm [AB] = h. (2) Construim perpendiculara [Ax pe [AB]. (3) Fixăm C ϵ[Ax, AC=h. (4) Δ ABC este cel dorit (fig. 31, b).



a ***b***

Fig. 31.

4)Trisectarea unghiuului drept.

Am amintit în capitolul anterior că, în general, un unghi nu poate fi trisectat numai cu rigla negradată şi compasul. Există însă valori particulare pentru care acest lucru este posibil, iar pentru unele (π/2, 3π /4 sau π) trisecţia se poate realiza numai cu rigla cu două muchii. Vom exemplifica pentru unghiul drept.

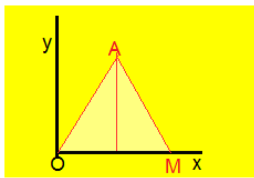


Fig. 32.

Se dă: unghiul xOy drept; **se cere**: trisectarea sa. (1) Construim pe [Ox triunghiul echilateral OMA, M ϵ (Ox, iar pe [Oy triunghiul echilateral ONB, N ϵ (Oy. (3) (OA şi (OB sunt trisectoarele unghiului xOy.

Nota: Trisectarea unghiului cu măsura de **3π /4** se poate realiza direct construind bisectoarea primului cadran sau construind un triunghi dreptunghic isoscel, iar a celui cu măsura **π** prin costrucţia a două triunghiuri echilaterale pe laturile opuse ale unghiului.

Bibliografie

1. ***Matei Al. & Co.*** *Desen Tehnic Industrial. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.*
2. **** Dicţionar de matematici generale. Editura Enciclopedică Română, 1974.*
3. ***Lalescu T.*** *Geometria Triunghiului. Editura Apollo, Craiova, 1993.*
4. ***Rainski V.*** *Revista Foaie Matematică. Chişinău 2004 -2005.*